

Modélisation mathématique par les graphes

Benjamin Peyrille

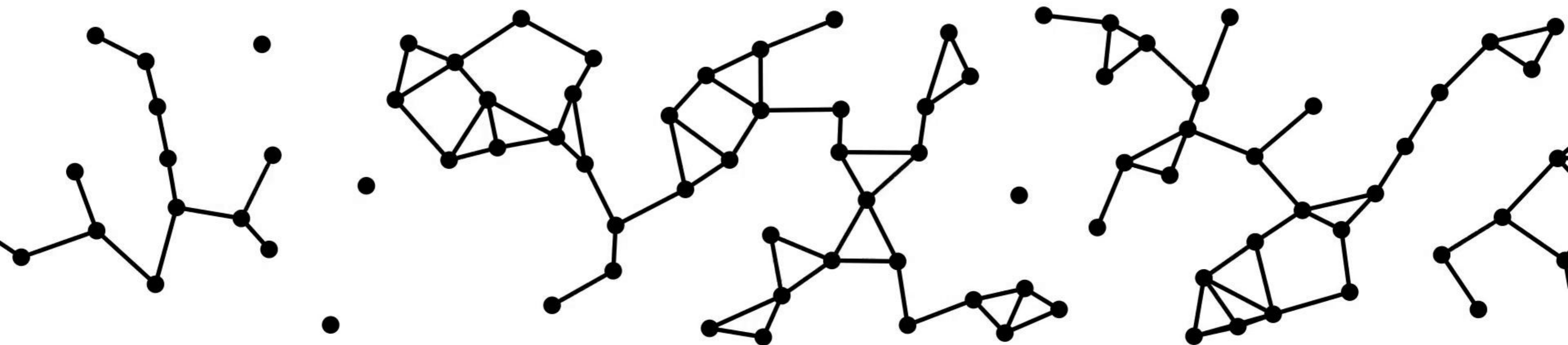
Laboratoire G-SCOP, Université Grenoble Alpes

21 Décembre 2023

Modélisation mathématique par les graphes

Benjamin Peyrille

Laboratoire G-SCOP, Université Grenoble Alpes



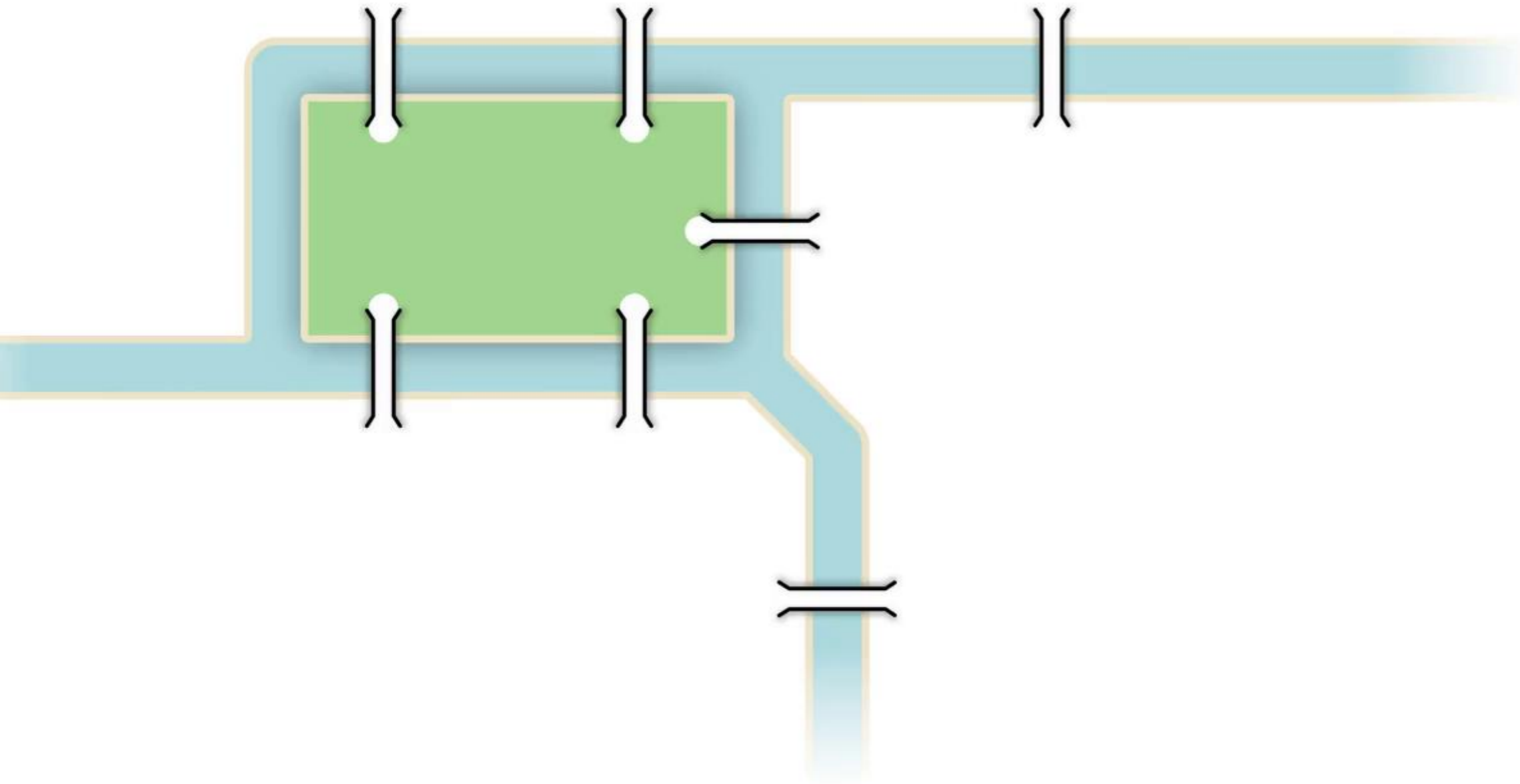
21 Décembre 2023

Les 7 ponts de Königsberg

Leonhard Euler



1735



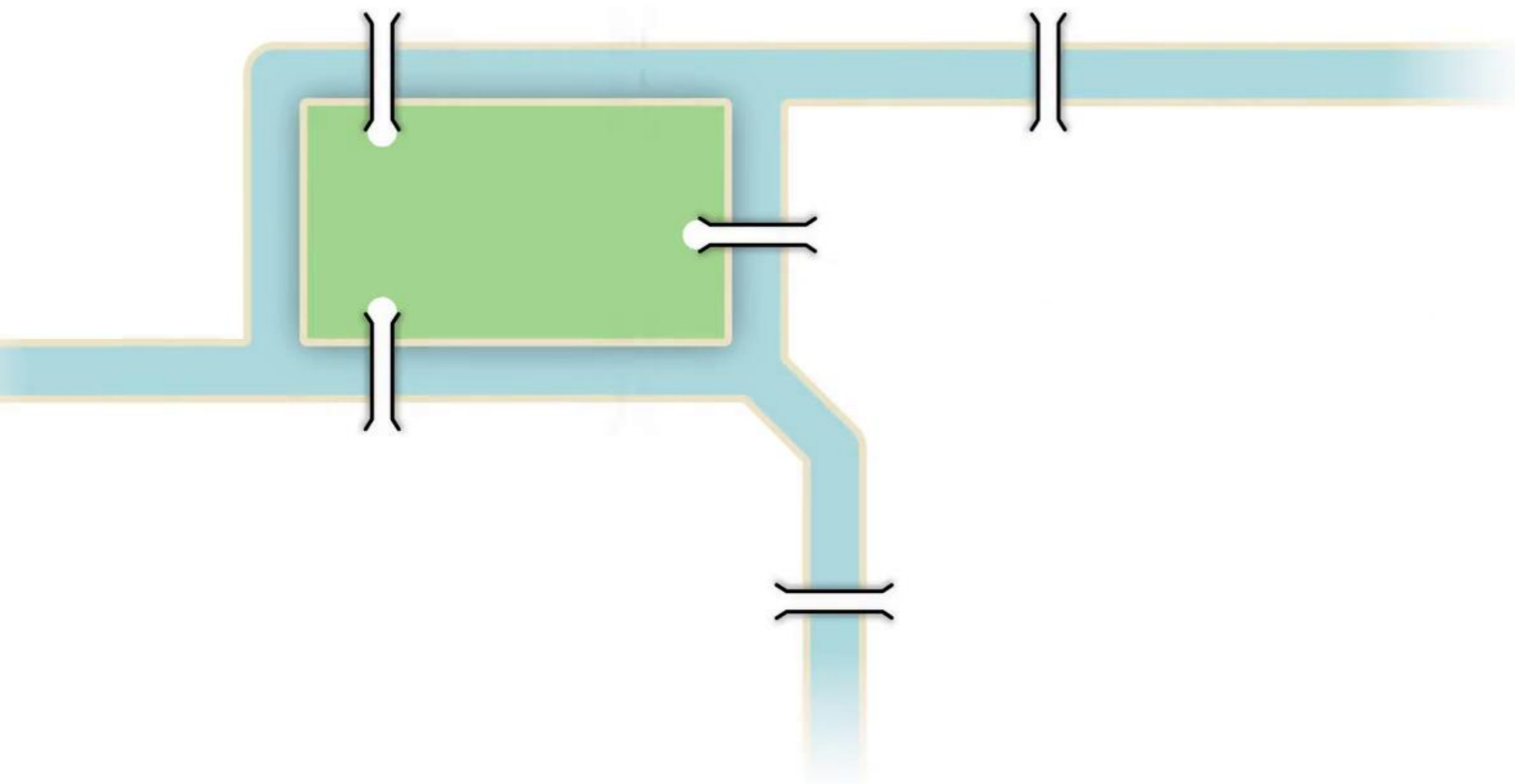
Est-il possible de traverser tous les ponts une seule et unique fois ?

Les 5 ponts de Kaliningrad

Leonhard Euler



1735



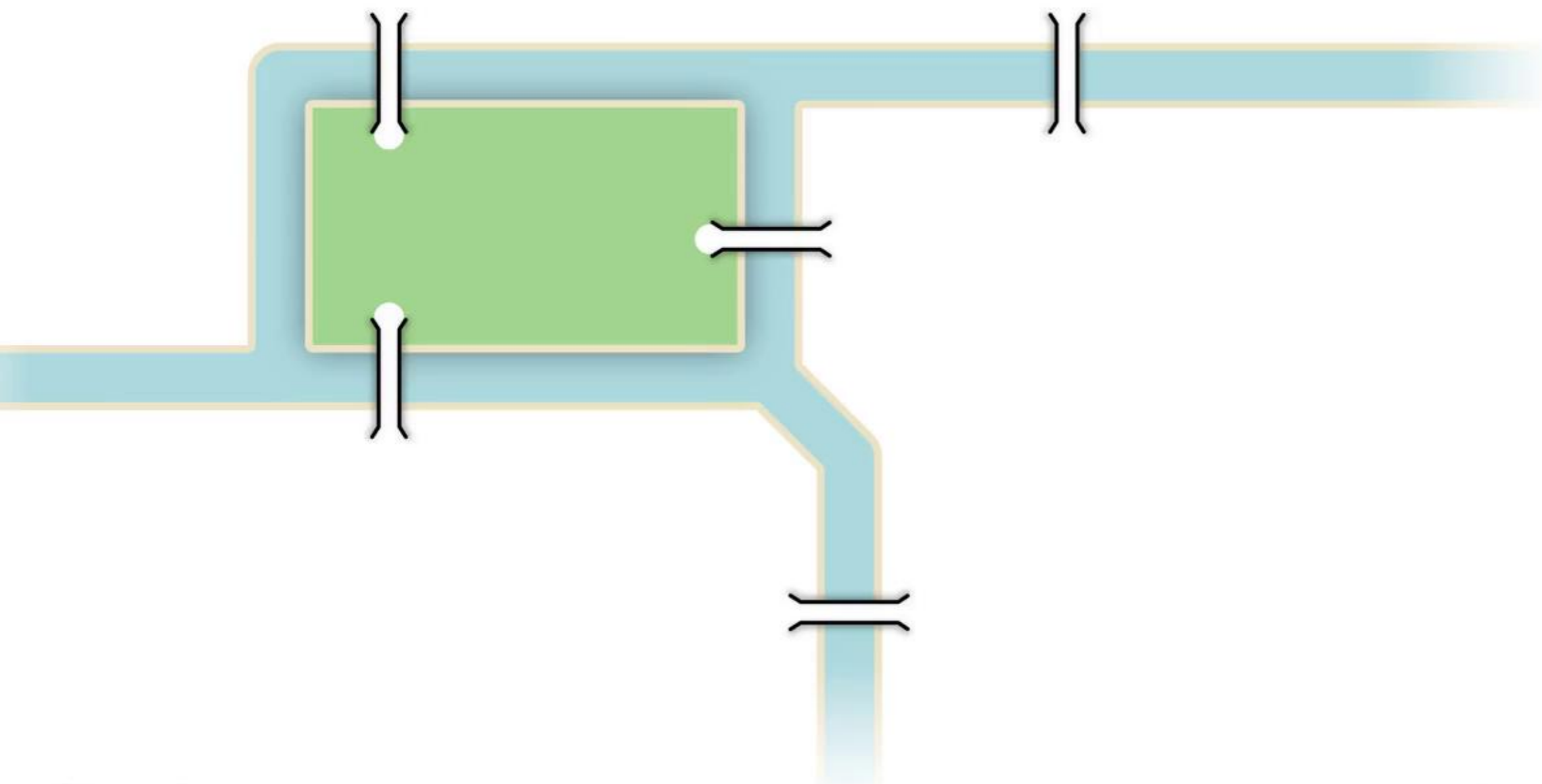
Est-il possible de traverser tous les ponts une seule et unique fois ?

Les 5 ponts de Kaliningrad

Leonhard Euler

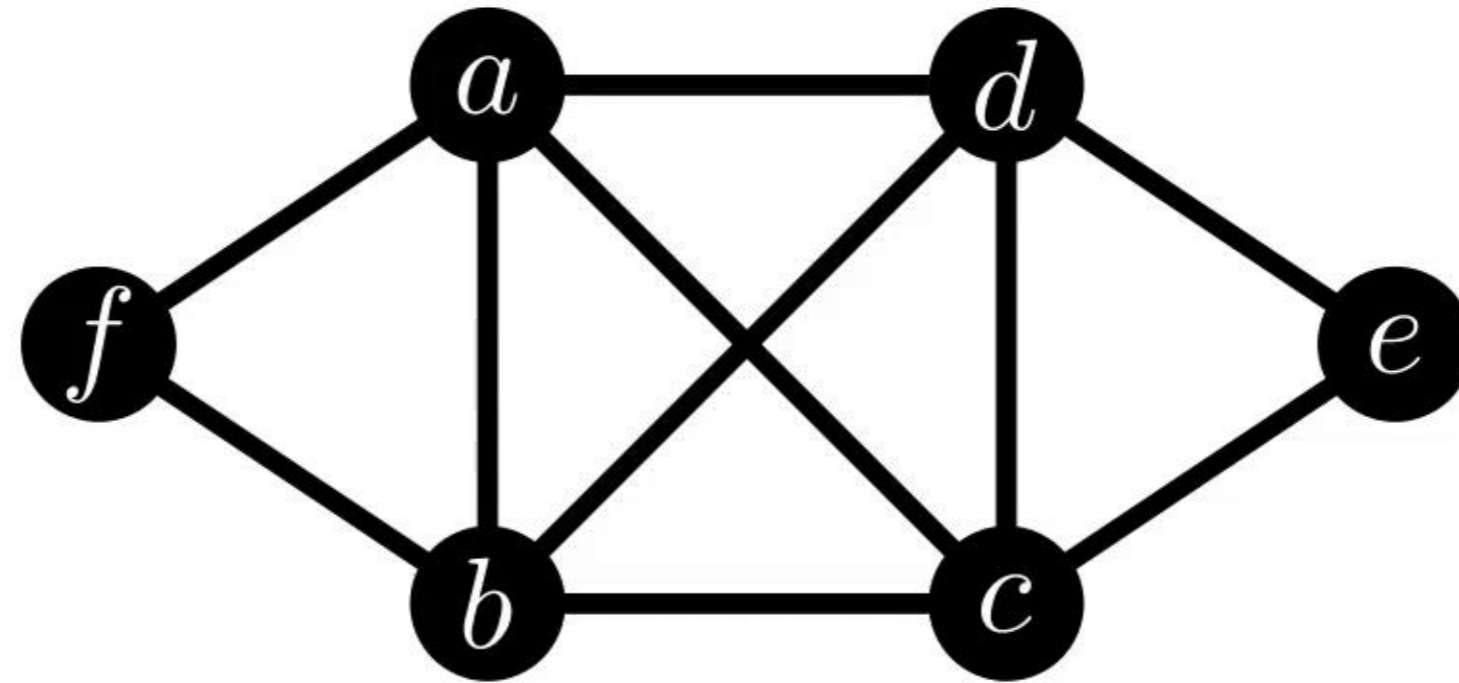


1735



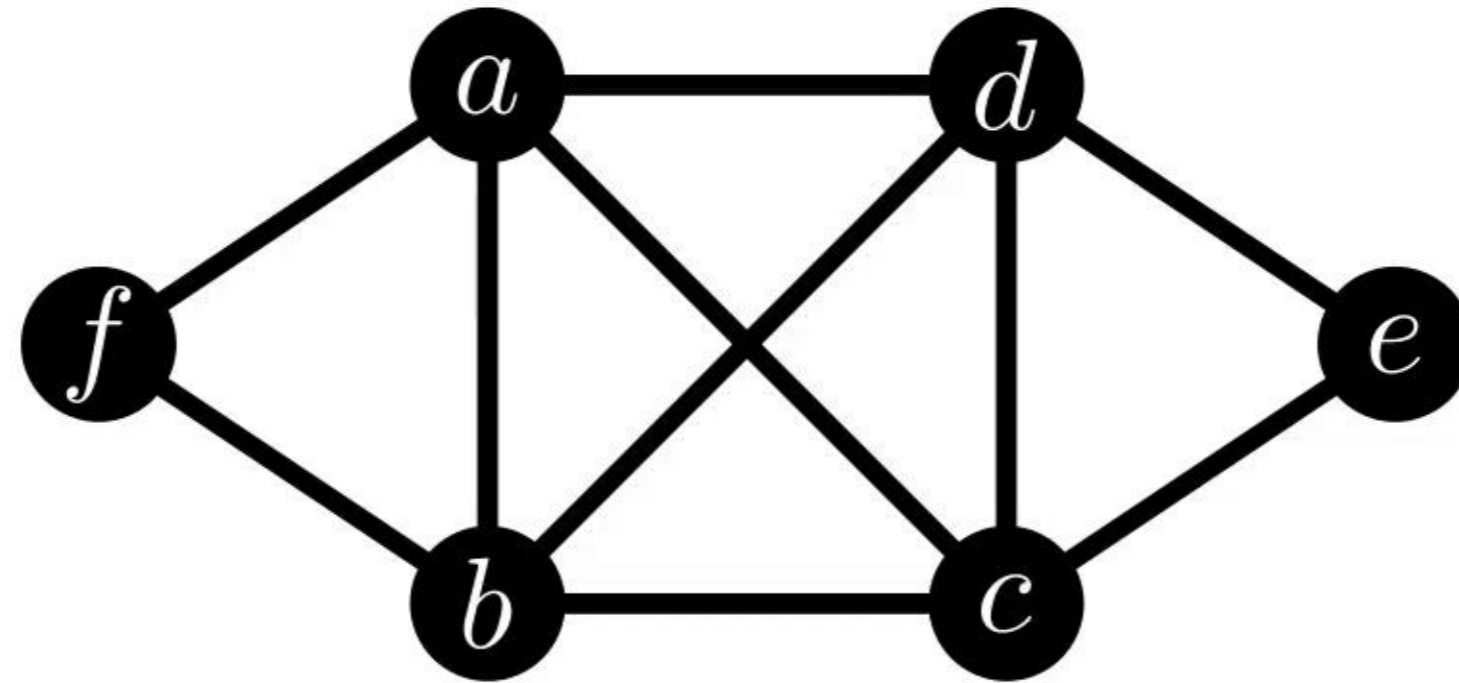
Est-il possible de traverser tous les ponts une seule et unique fois ?
Et retourner au point de départ ?

Définition d'un **graphe** $G = (S, A)$

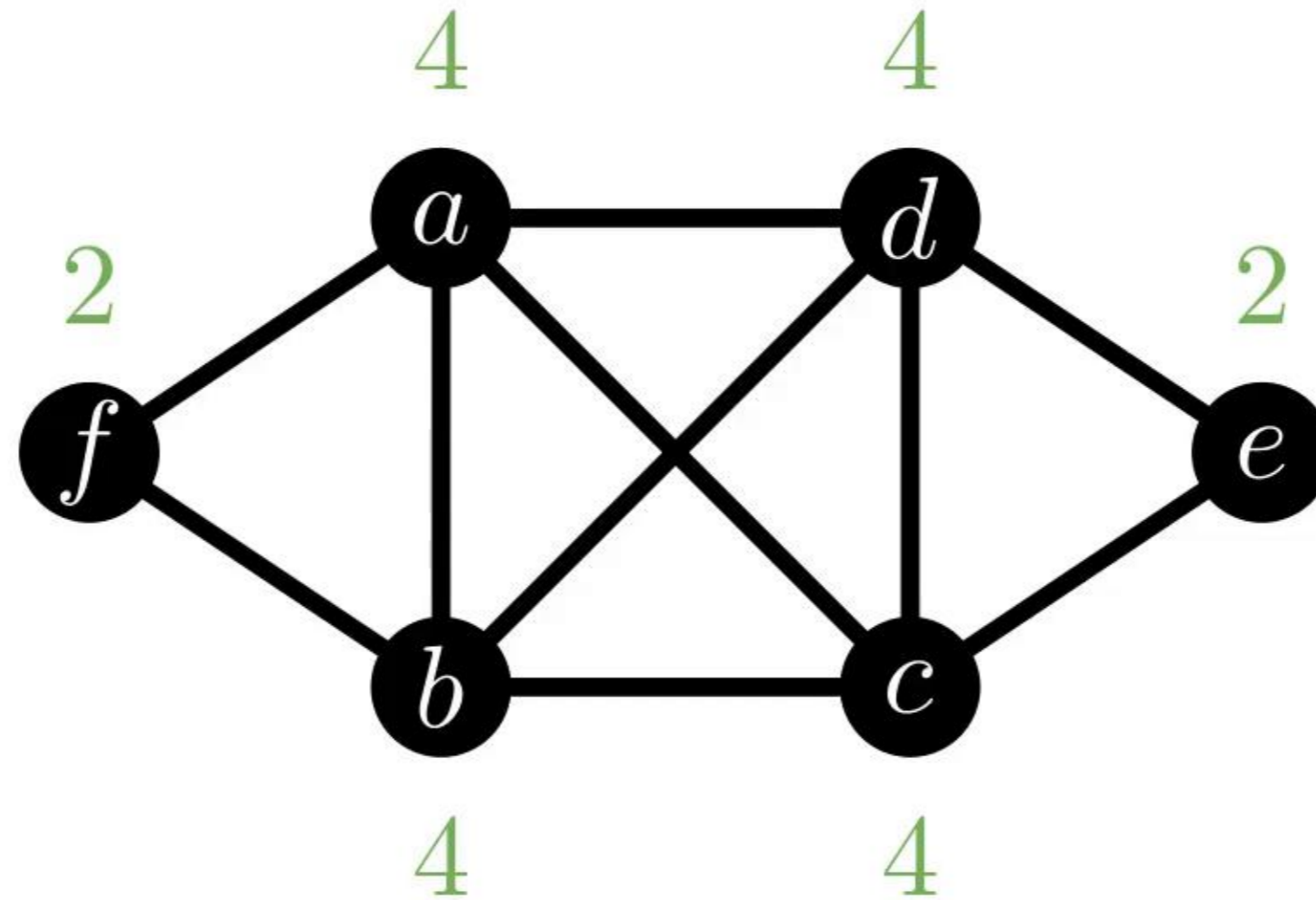


- Ensemble S de **sommets**
- Ensemble A d'**arêtes**

Peut-on dessiner ce graphe sans lever le crayon et revenir au point de départ ?



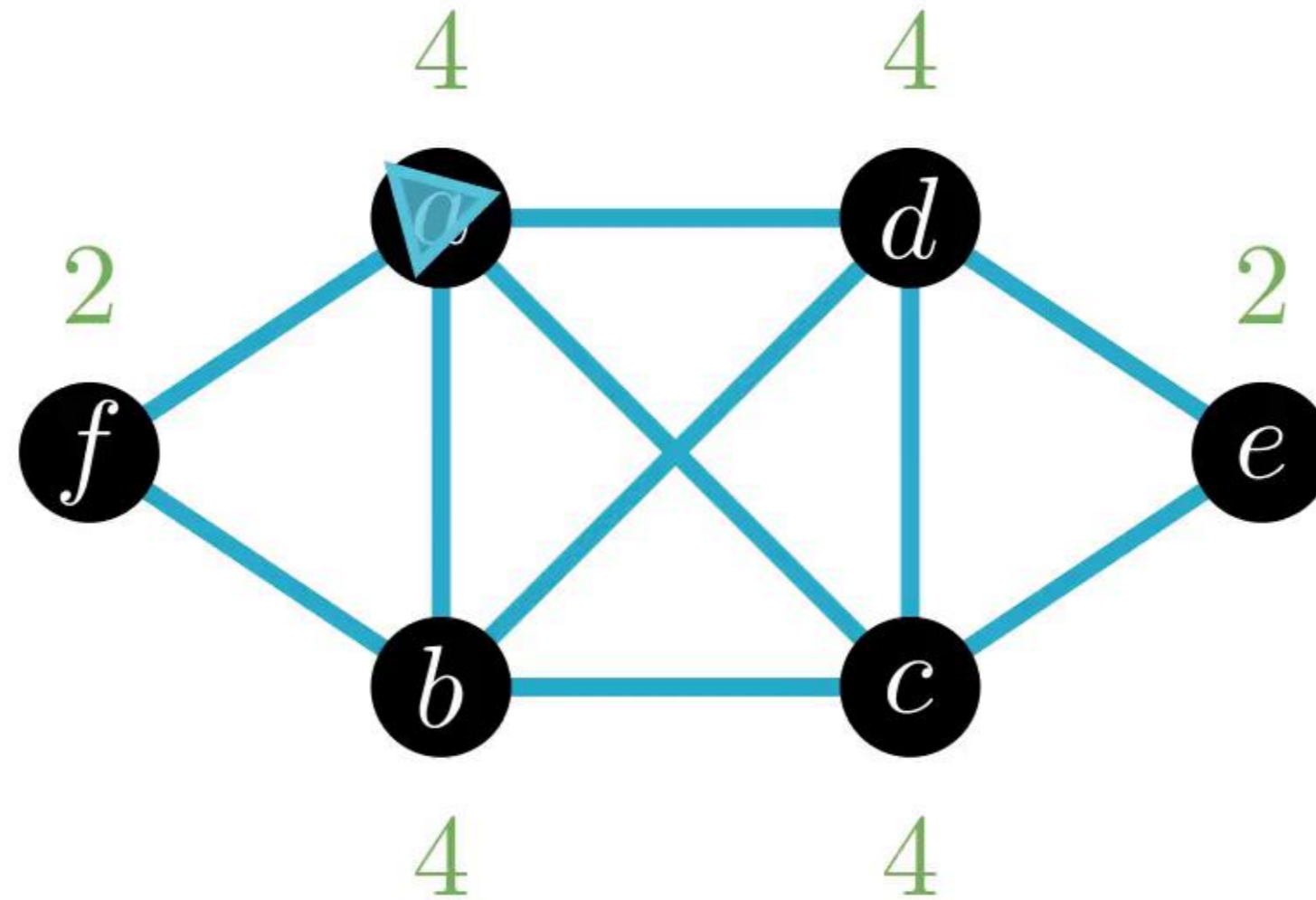
Peut-on dessiner ce graphe sans lever le crayon et revenir au point de départ ?



Le **degré** $d(v)$ d'un sommet v est le nombre d'arêtes incidentes à v .

Le degré de tous les sommets doit être **pair**.

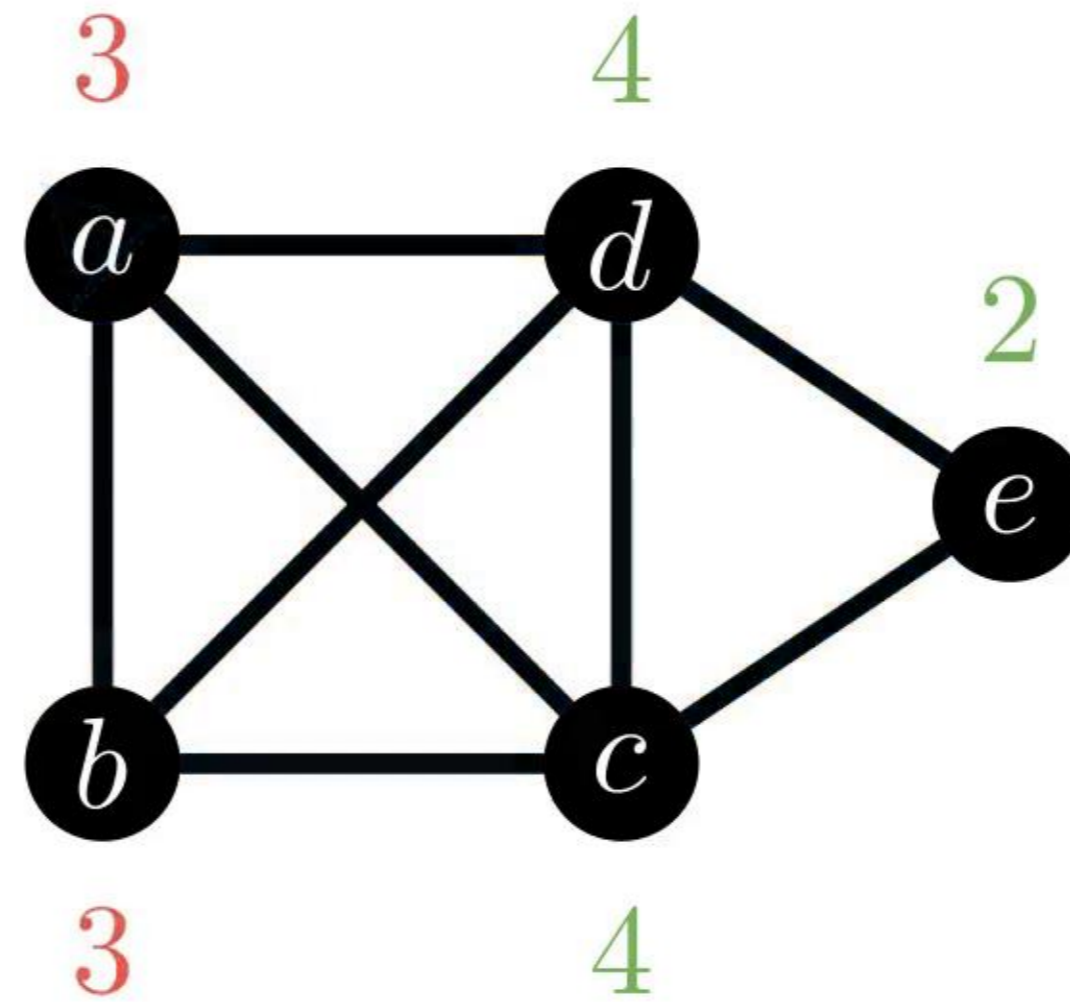
Peut-on dessiner ce graphe sans lever le crayon et revenir au point de départ ?



Le **degré** $d(v)$ d'un sommet v est le nombre d'arêtes incidentes à v .

Le degré de tous les sommets doit être **pair**.

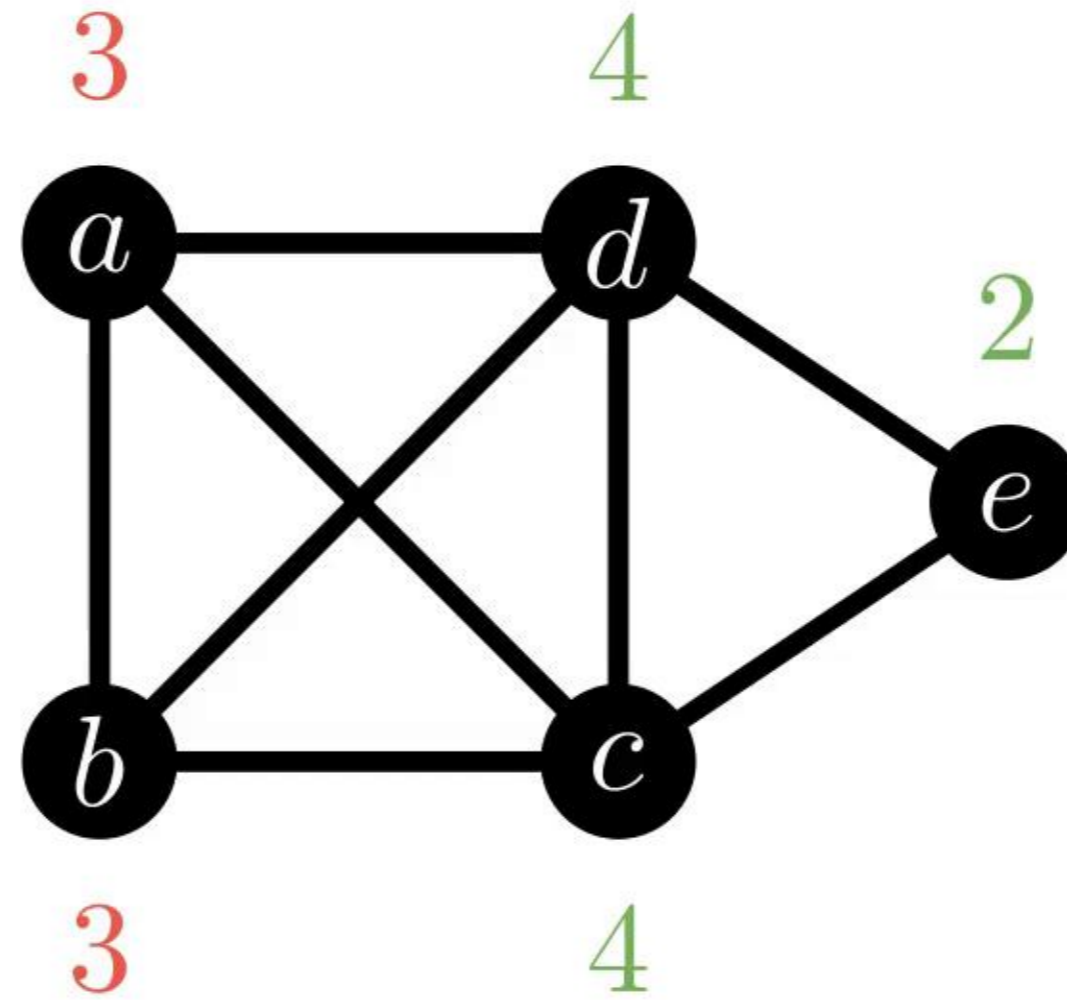
Peut-on dessiner ce graphe sans lever le crayon et revenir au point de départ ?



Le **degré** $d(v)$ d'un sommet v est le nombre d'arêtes incidentes à v .

Le degré de tous les sommets doit être **pair**.

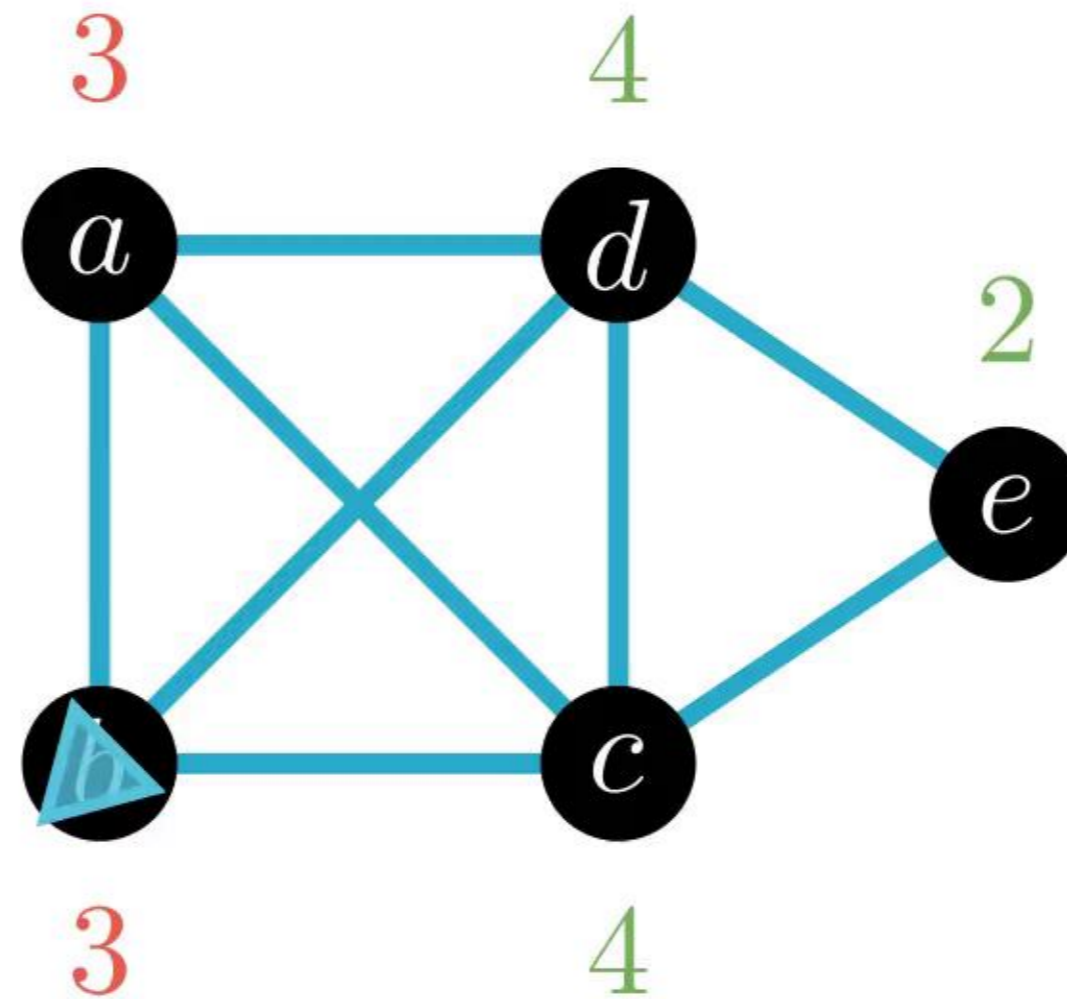
Peut-on dessiner ce graphe sans lever le crayon ?



Le **degré** $d(v)$ d'un sommet v est le nombre d'arêtes incidentes à v .

Au plus deux sommets doivent avoir un degré **impair**.

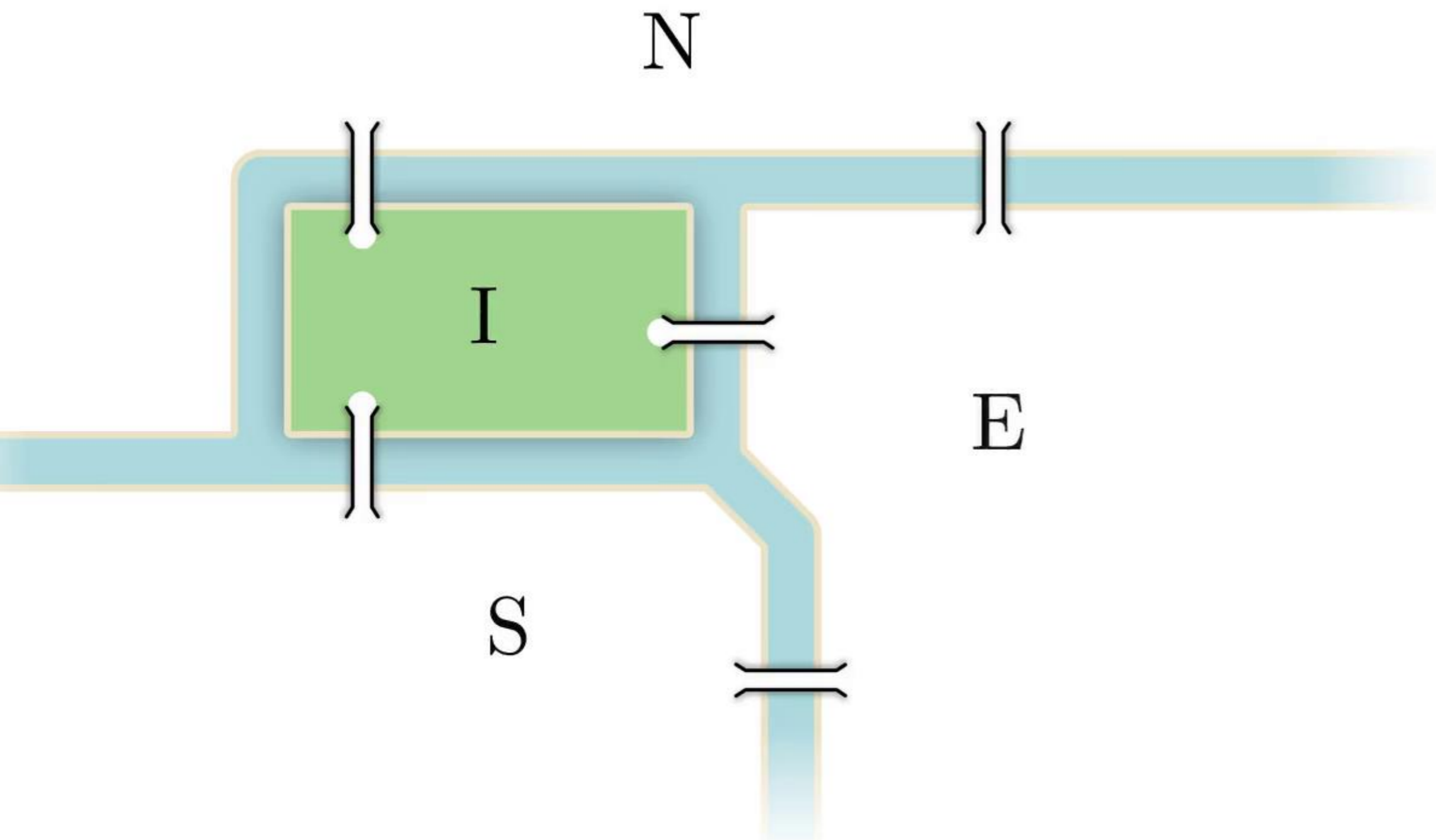
Peut-on dessiner ce graphe sans lever le crayon ?



Le **degré** $d(v)$ d'un sommet v est le nombre d'arêtes incidentes à v .

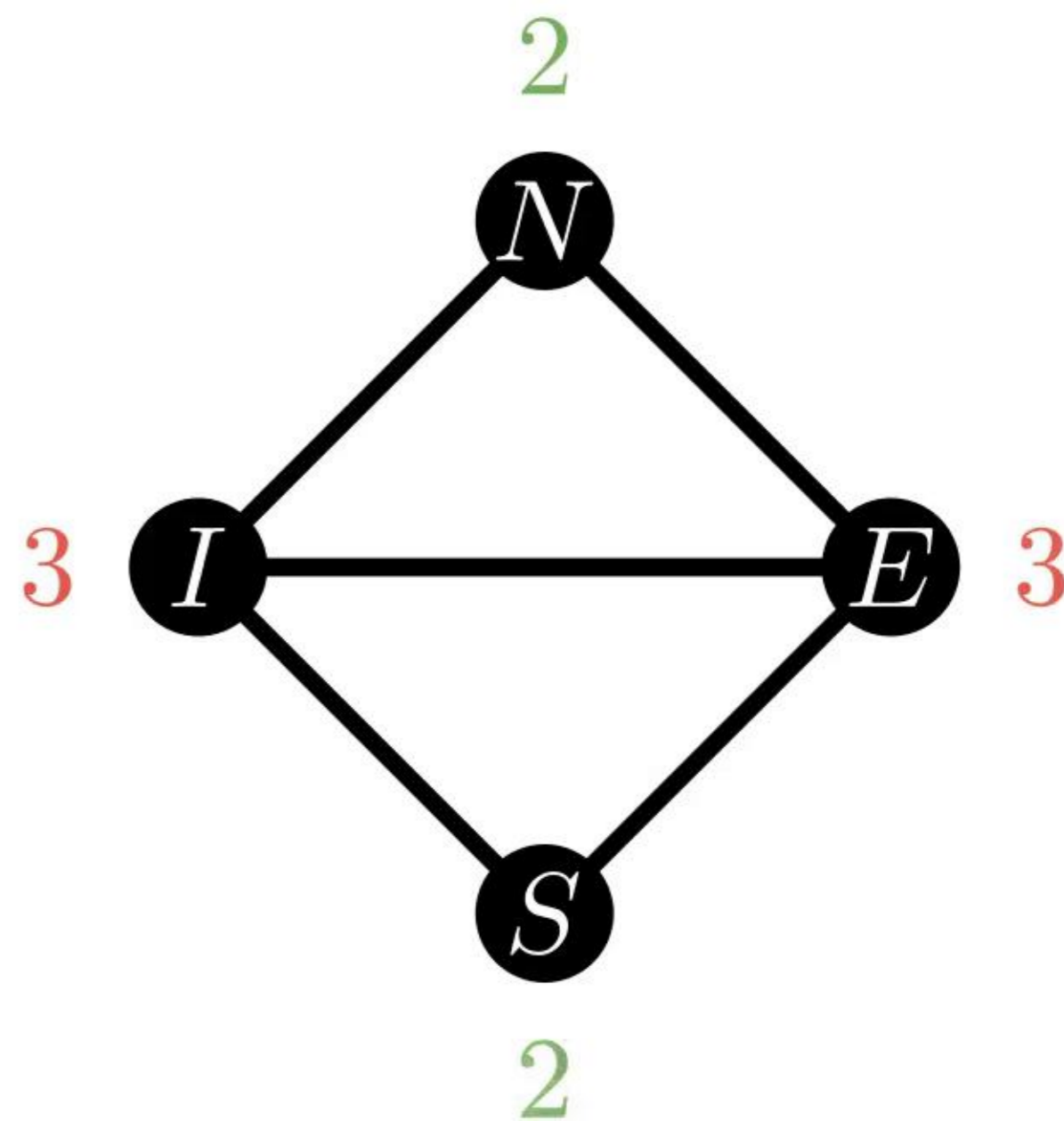
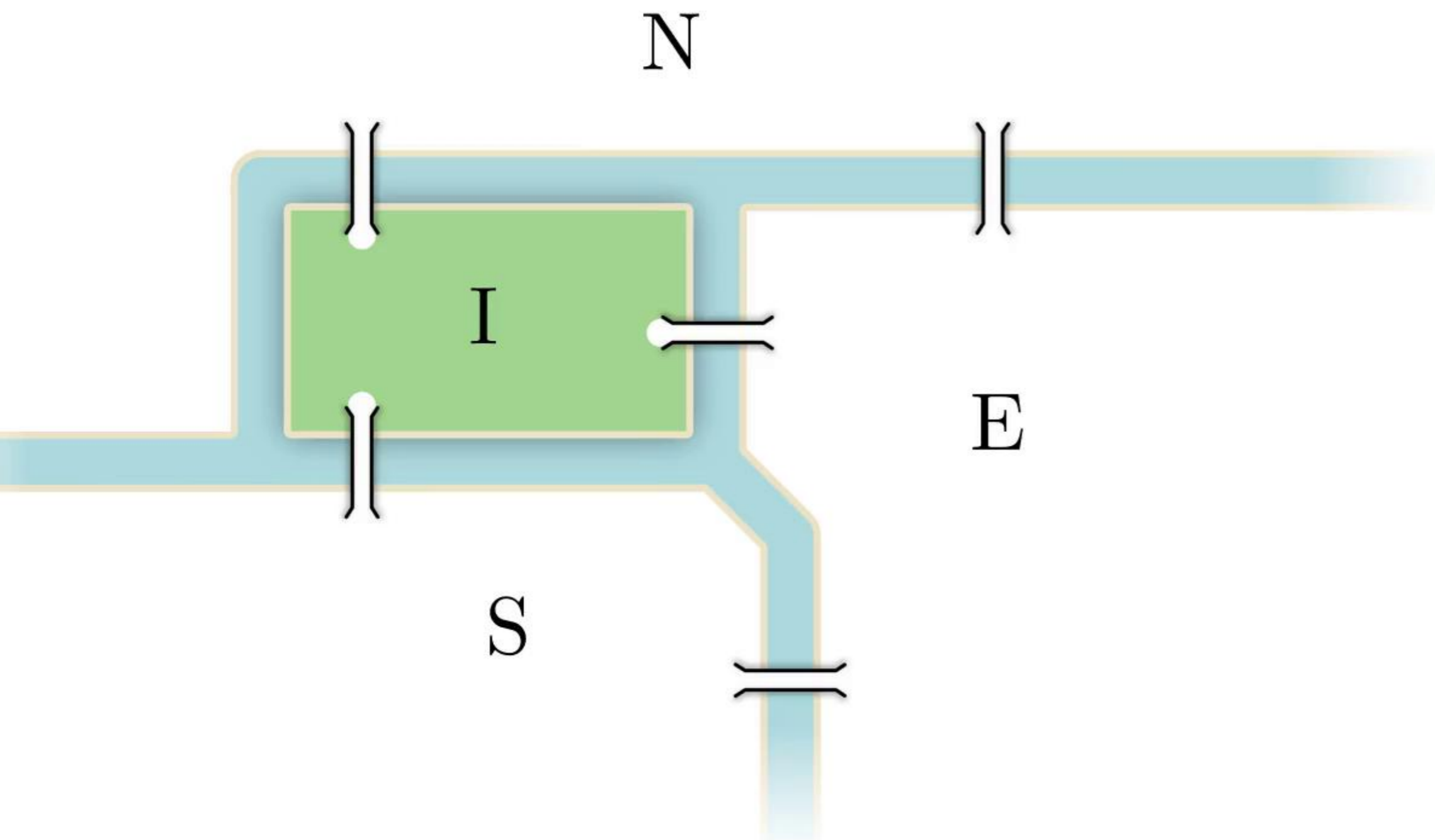
Au plus deux sommets doivent avoir un degré **impair**.

Les 5 ponts de Kaliningrad



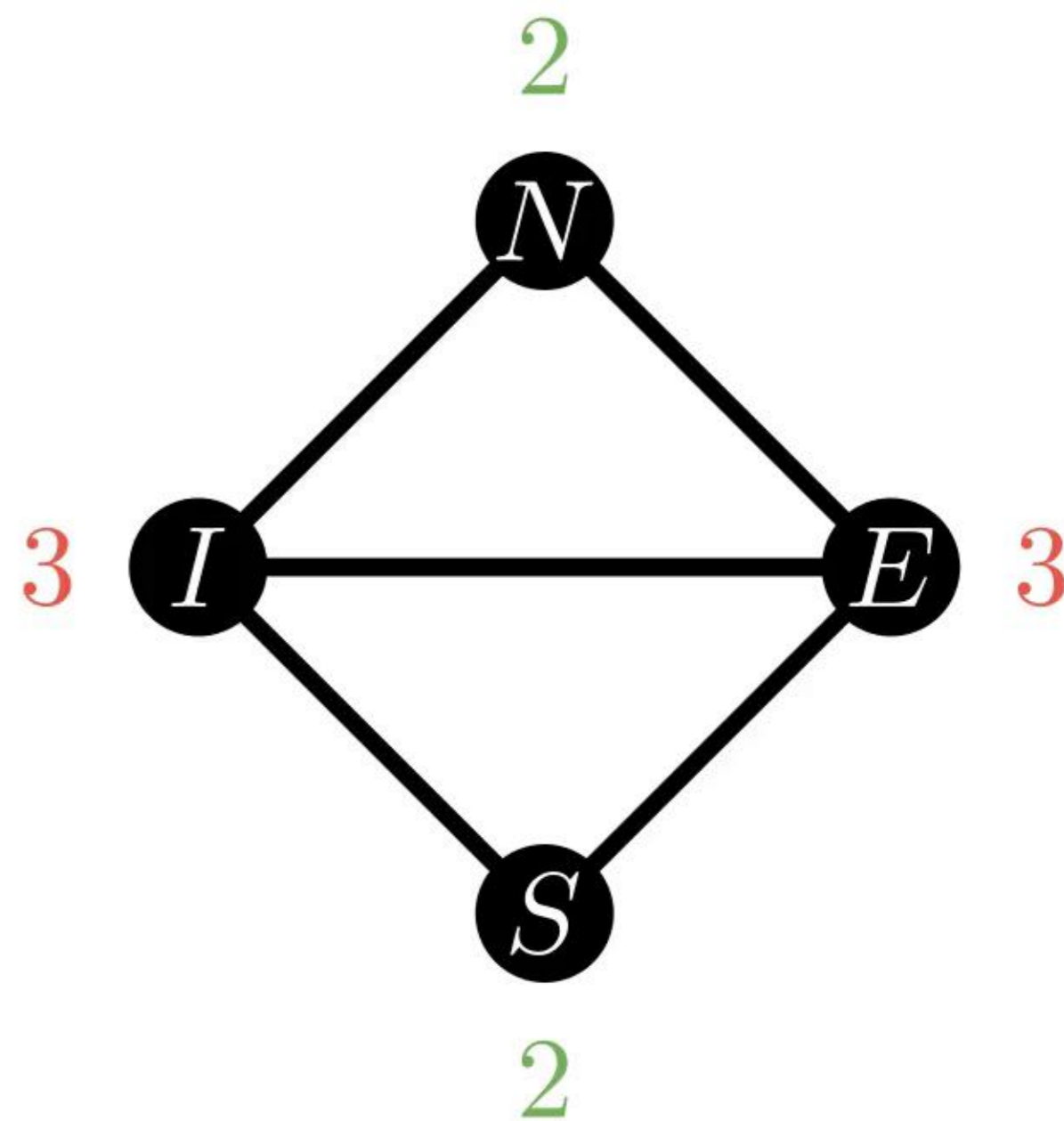
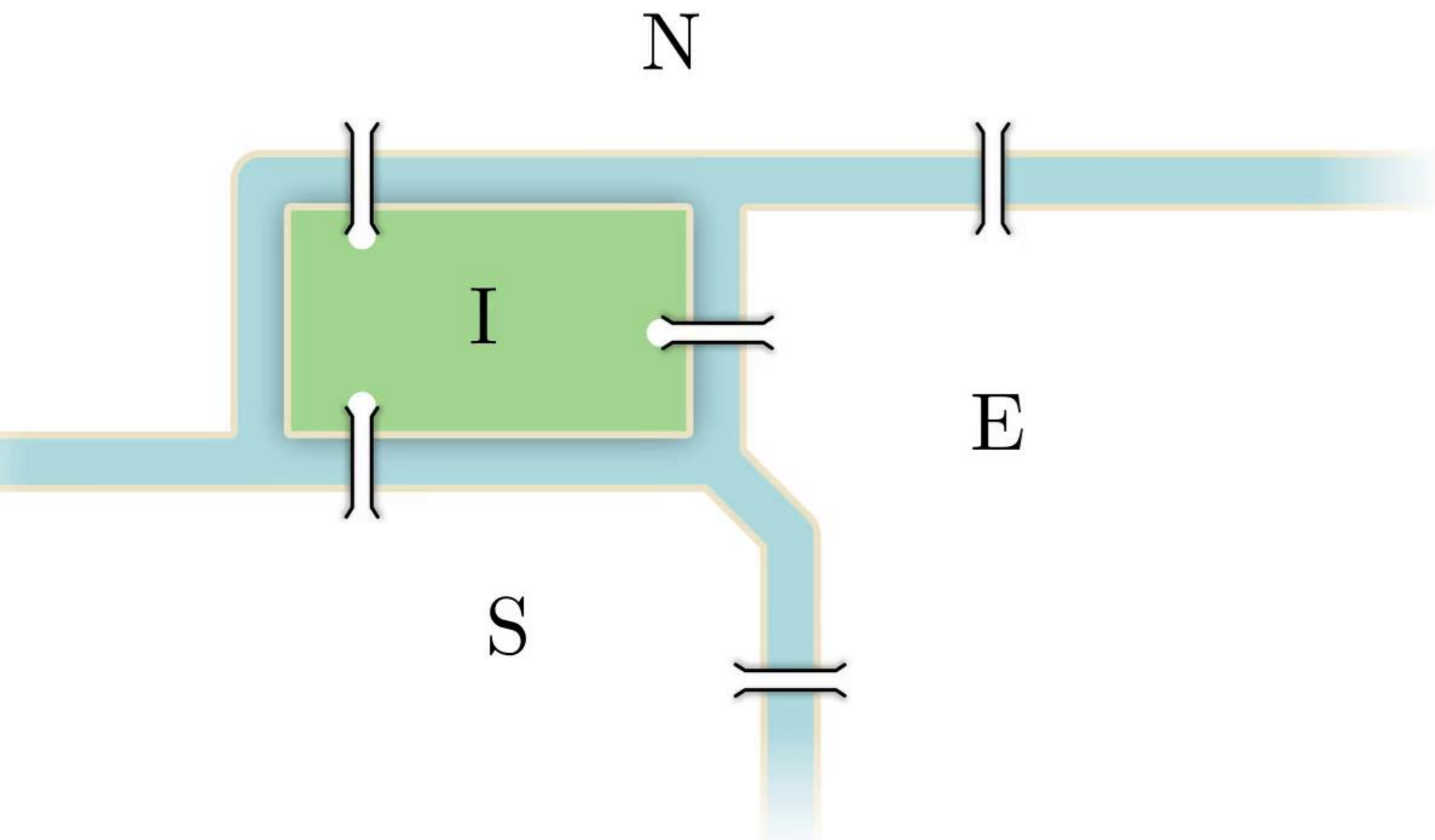
Est-il possible de traverser tous les ponts une seule et unique fois ?

Les 5 ponts de Kaliningrad



Est-il possible de traverser tous les ponts une seule et unique fois ?

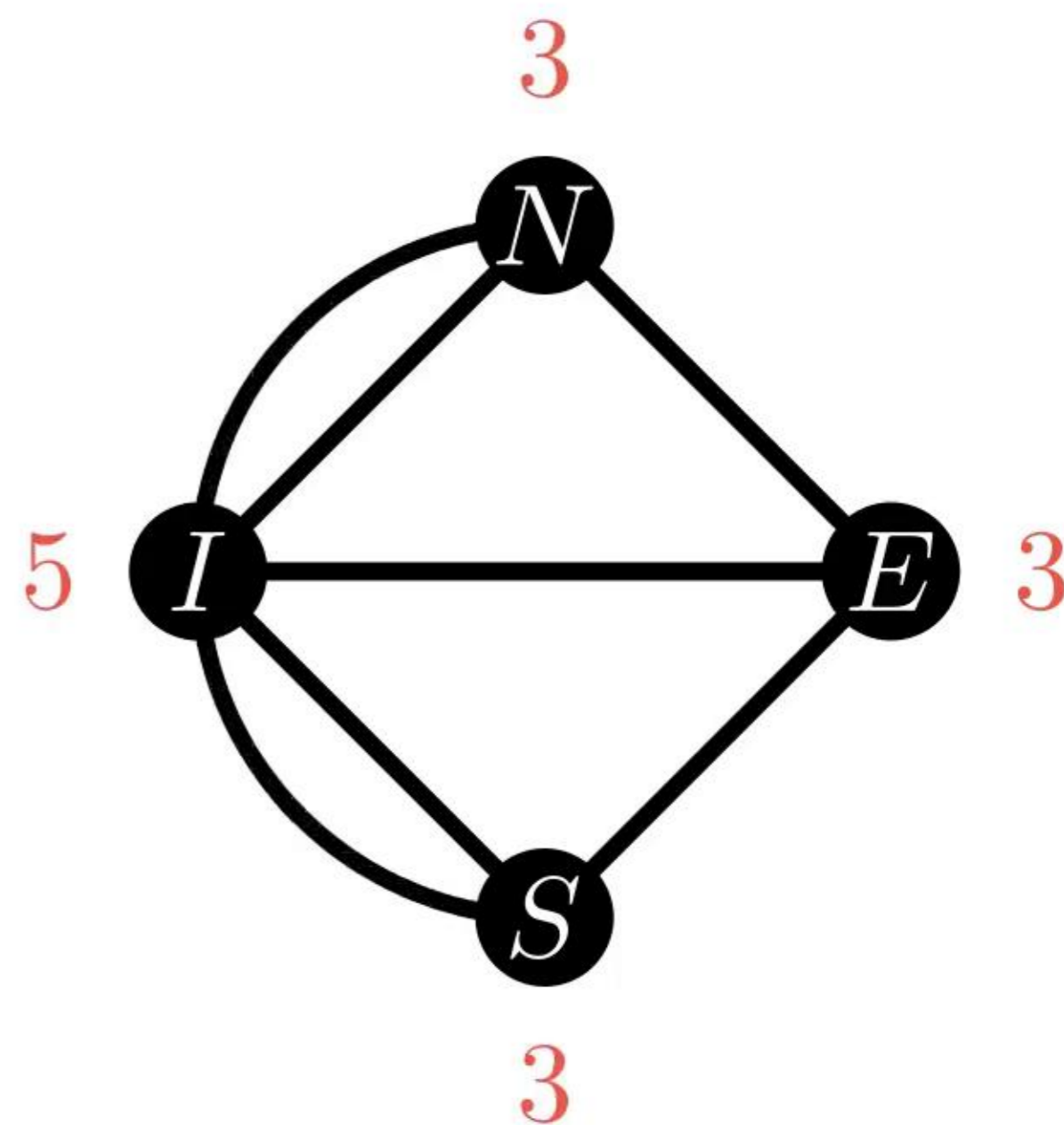
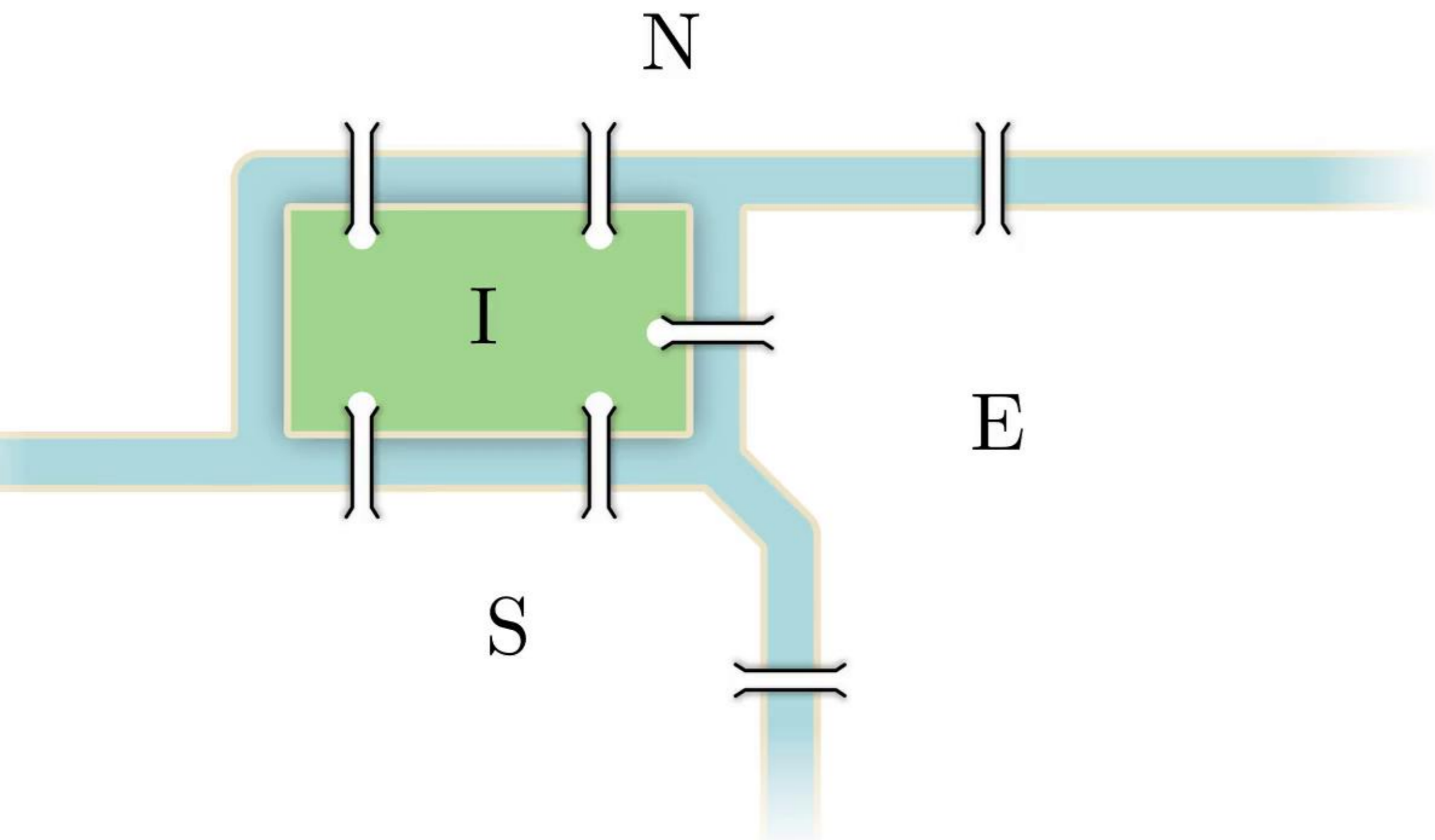
Les 5 ponts de Kaliningrad



Est-il possible de traverser tous les ponts une seule et unique fois ?

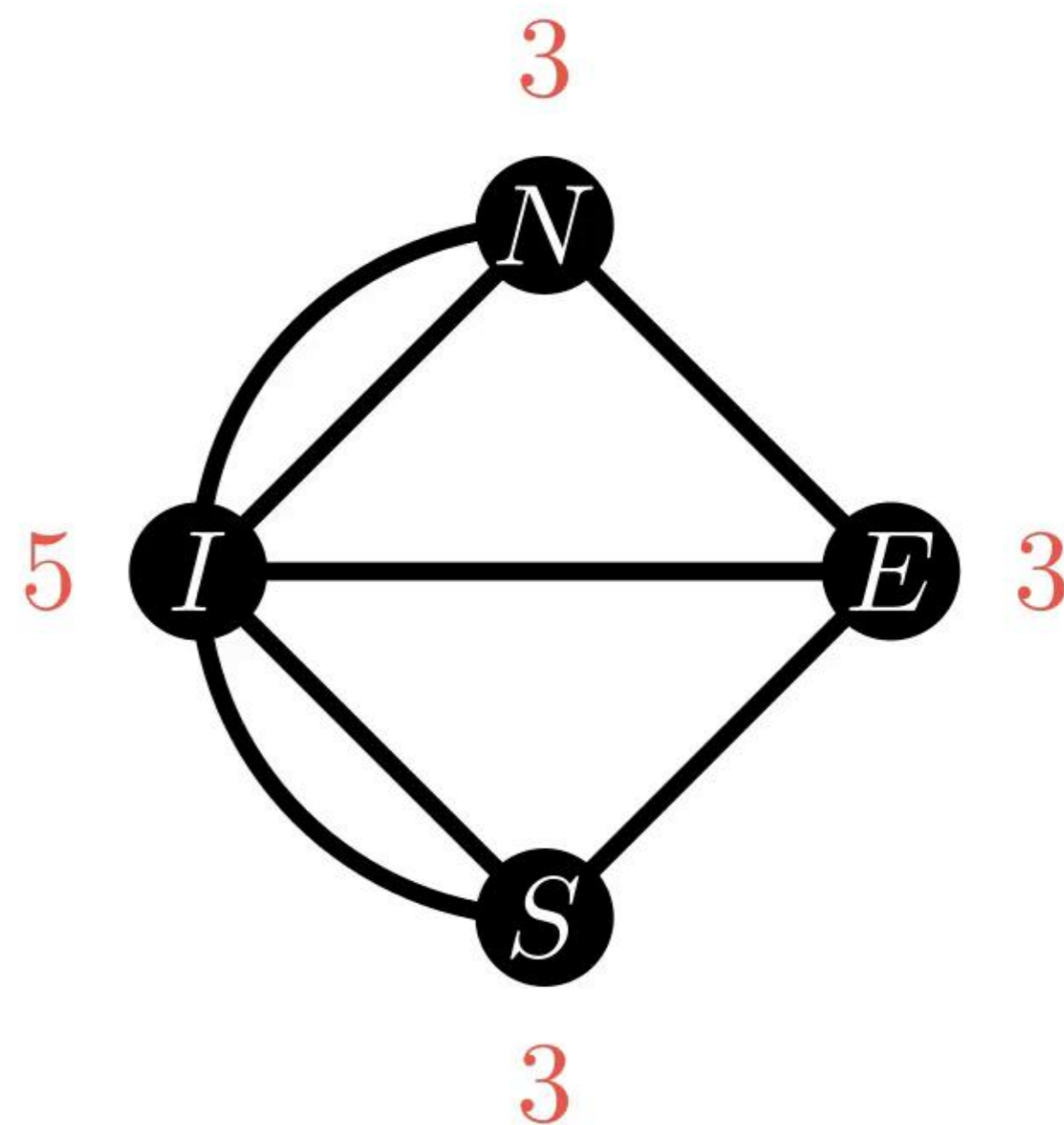
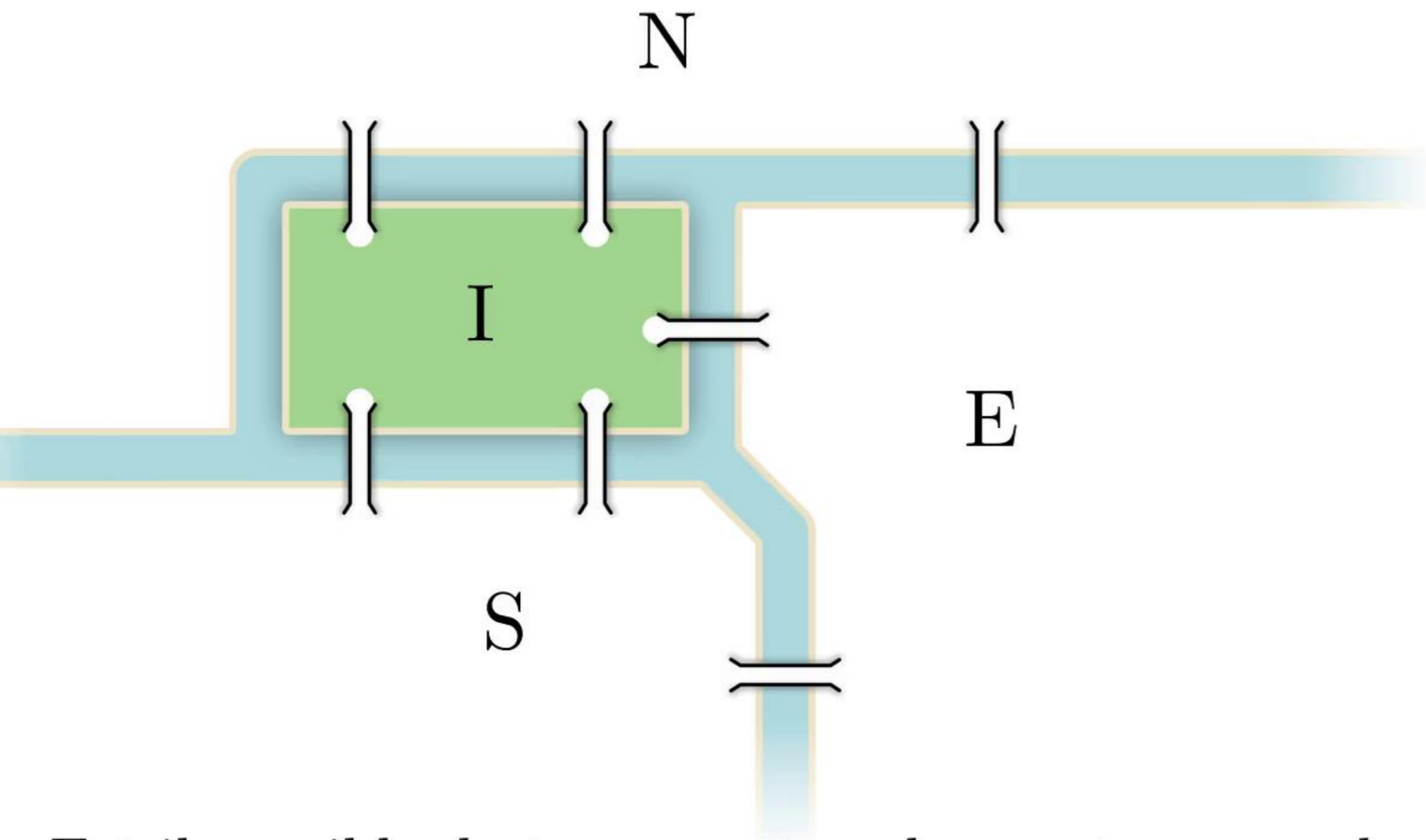
Oui, mais sans retourner au point d'origine.

Les 7 ponts de Königsberg



Est-il possible de traverser tous les ponts une seule et unique fois ?

Les 7 ponts de Königsberg



Est-il possible de traverser tous les ponts une seule et unique fois ?

Impossible, il y a trop de sommets de degré impair.

Un **modèle mathématique** est une description abstraite d'une situation réelle à l'aide de représentations mathématiques (ici les graphes).

Quels problèmes réels peut-on représenter à l'aide de graphes ?

Un **modèle mathématique** est une description abstraite d'une situation réelle à l'aide de représentations mathématiques (ici les graphes).

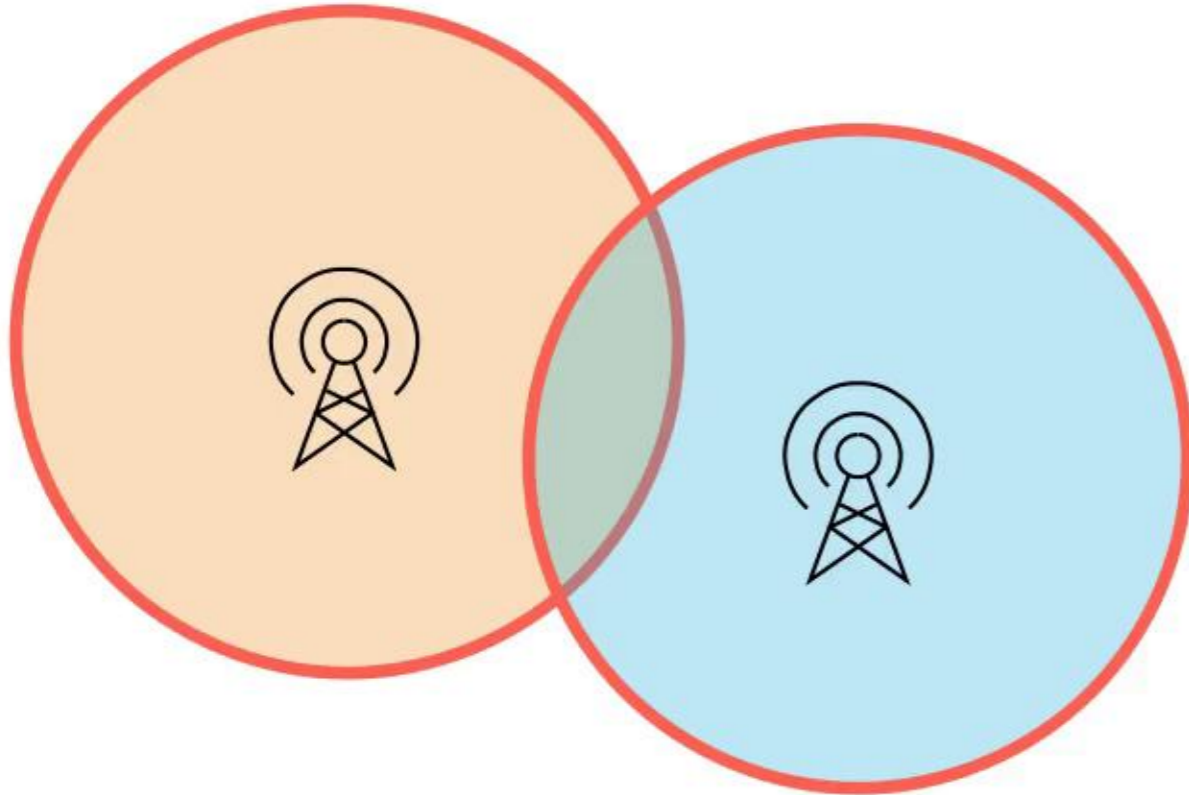
Quels problèmes réels peut-on représenter à l'aide de graphes ?

- Plus court chemin (GPS)
- Résolution de jeux (Échecs, Go...)
- Flux économiques (géopolitique, industrie, trading...)
- Réseaux sociaux et simulations d'épidémies
- Optimisation des programmes informatiques

Ce dont on va parler :

Ce dont on va parler :

Incompatibilités

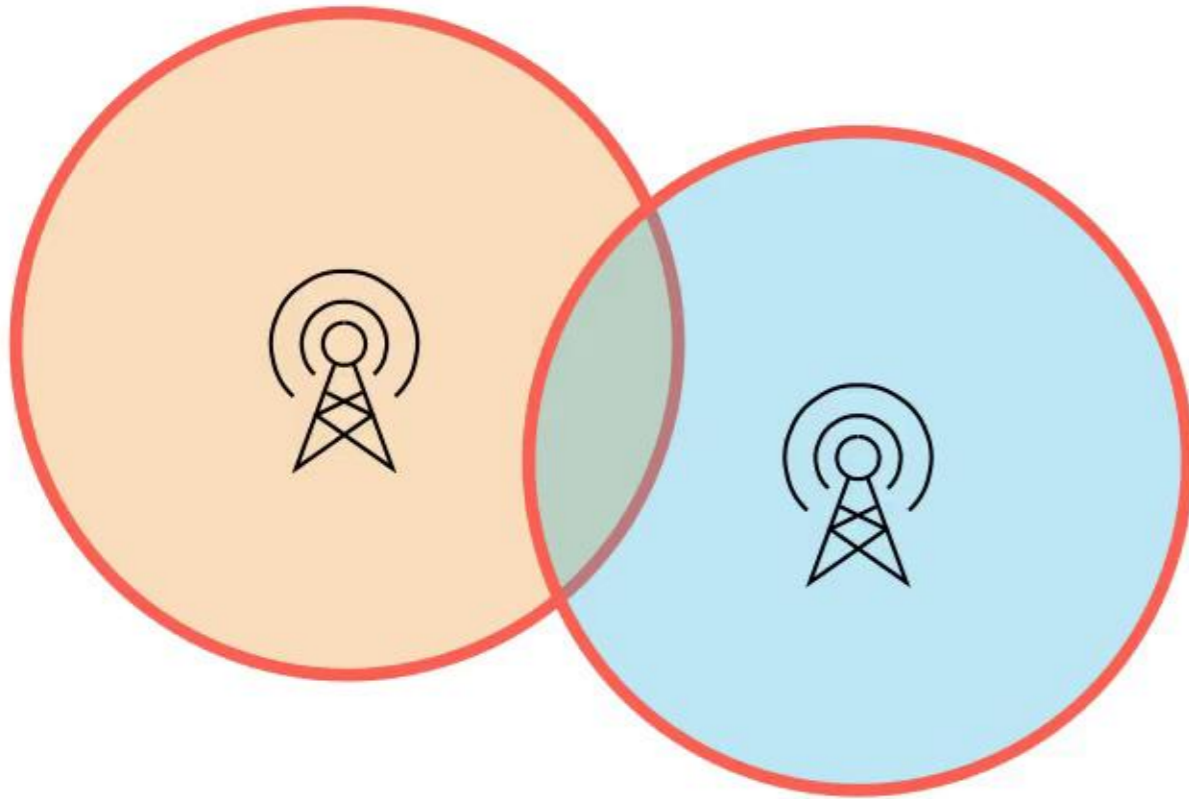


	Lundi 20/11/2023	Mardi 21/11/2023	Mercredi 22/11/2023	Jeudi 23/11/2023	Vendredi 24/11/2023
07:30					
08:00					
08:30					
09:00					
09:30					
10:00					
10:30					
11:00					
11:30					
12:00					
12:30					
13:00					
13:30					
14:00					
14:30					
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00					
17:30					
18:00					
18:30					
19:00					

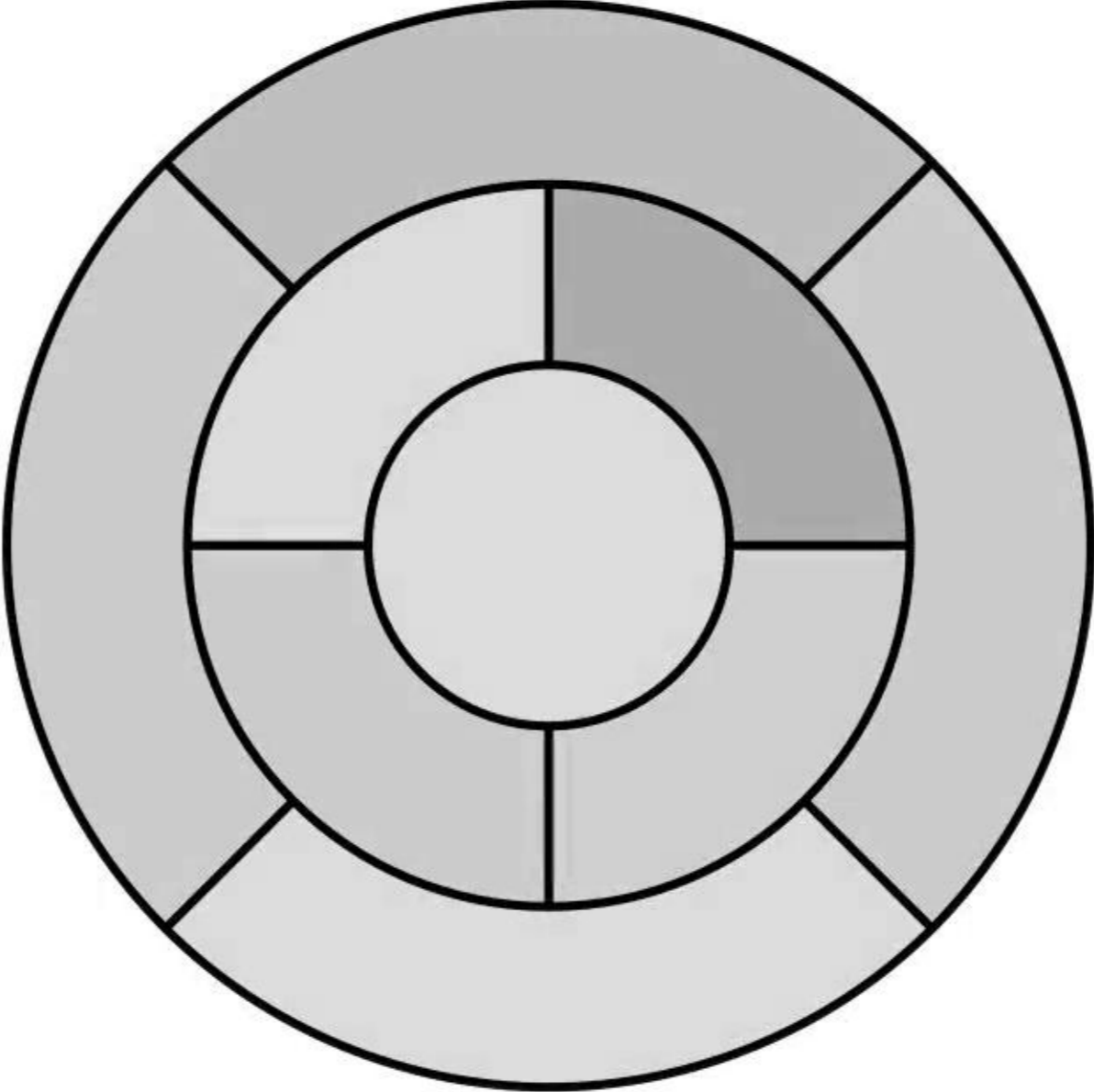
Ce dont on va parler :

Incompatibilités

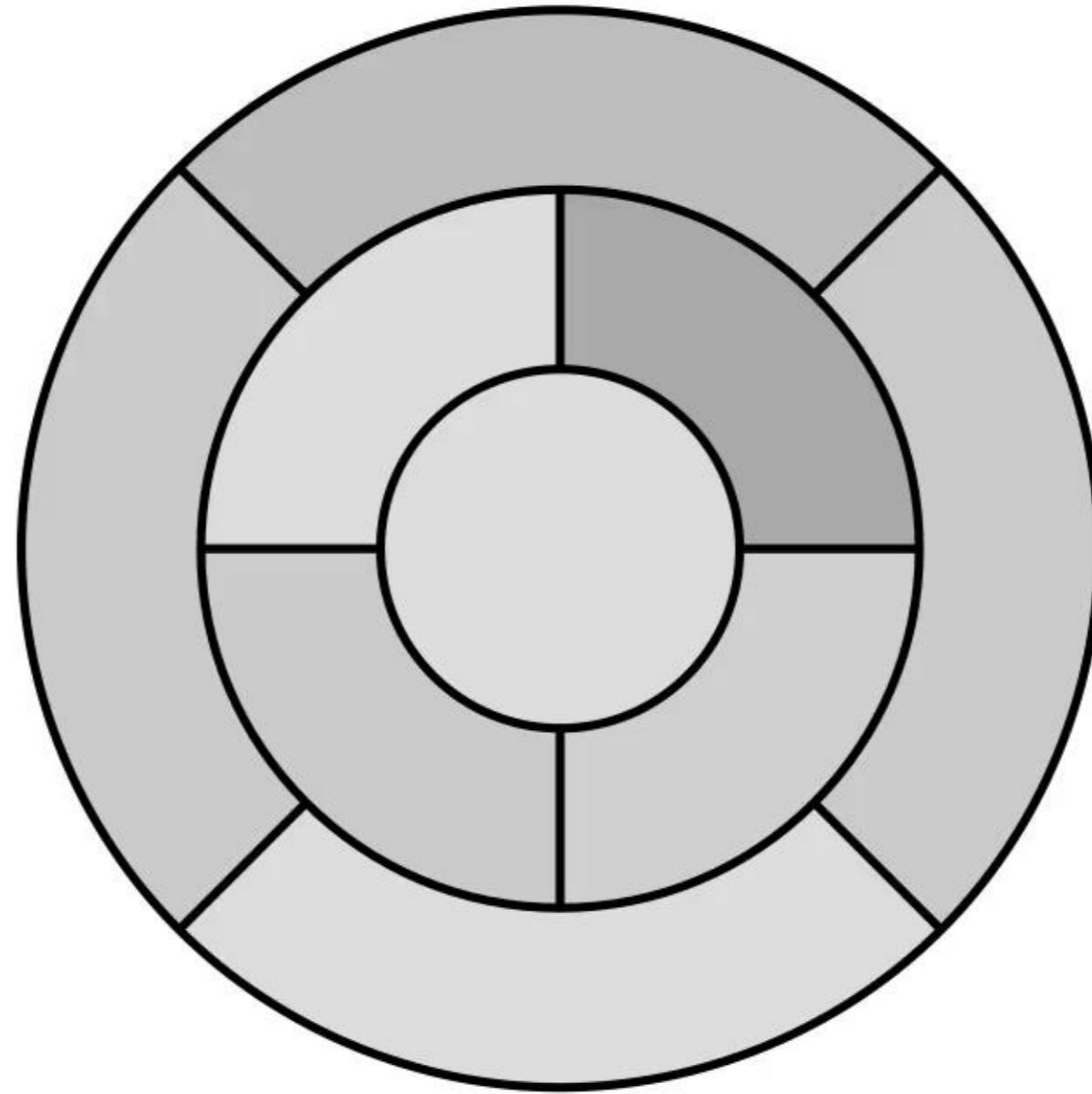
Compatibilités



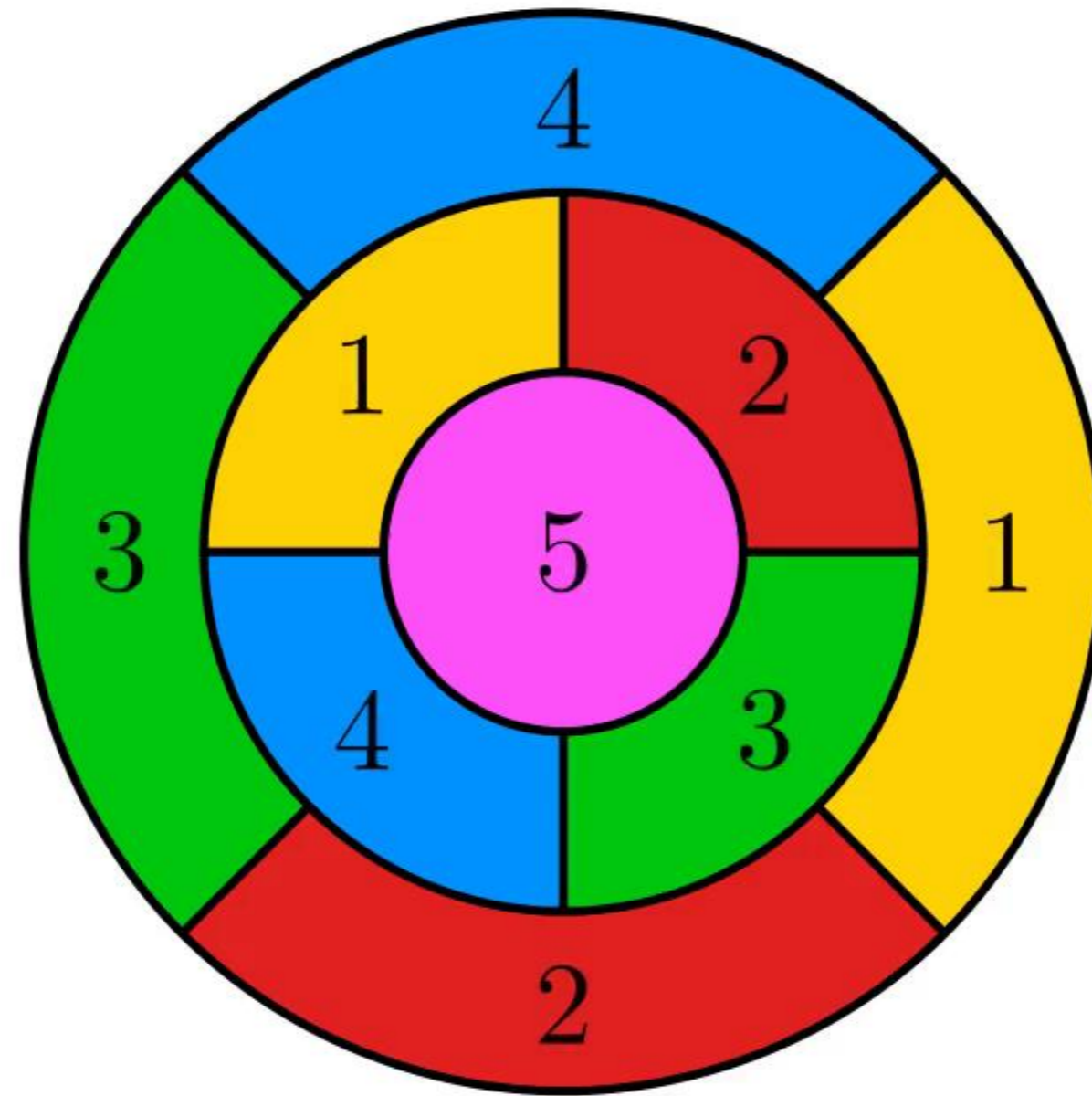
	Lundi 20/11/2023	Mardi 21/11/2023	Mercredi 22/11/2023	Jeudi 23/11/2023	Vendredi 24/11/2023
07:30					
08:00					
08:30					
09:00					
09:30					
10:00					
10:30					
11:00					
11:30					
12:00					
12:30					
13:00					
13:30					
14:00					
14:30					
15:00					
15:30					
16:00					
16:30					
17:00					
17:30					
18:00					
18:30					
19:00					



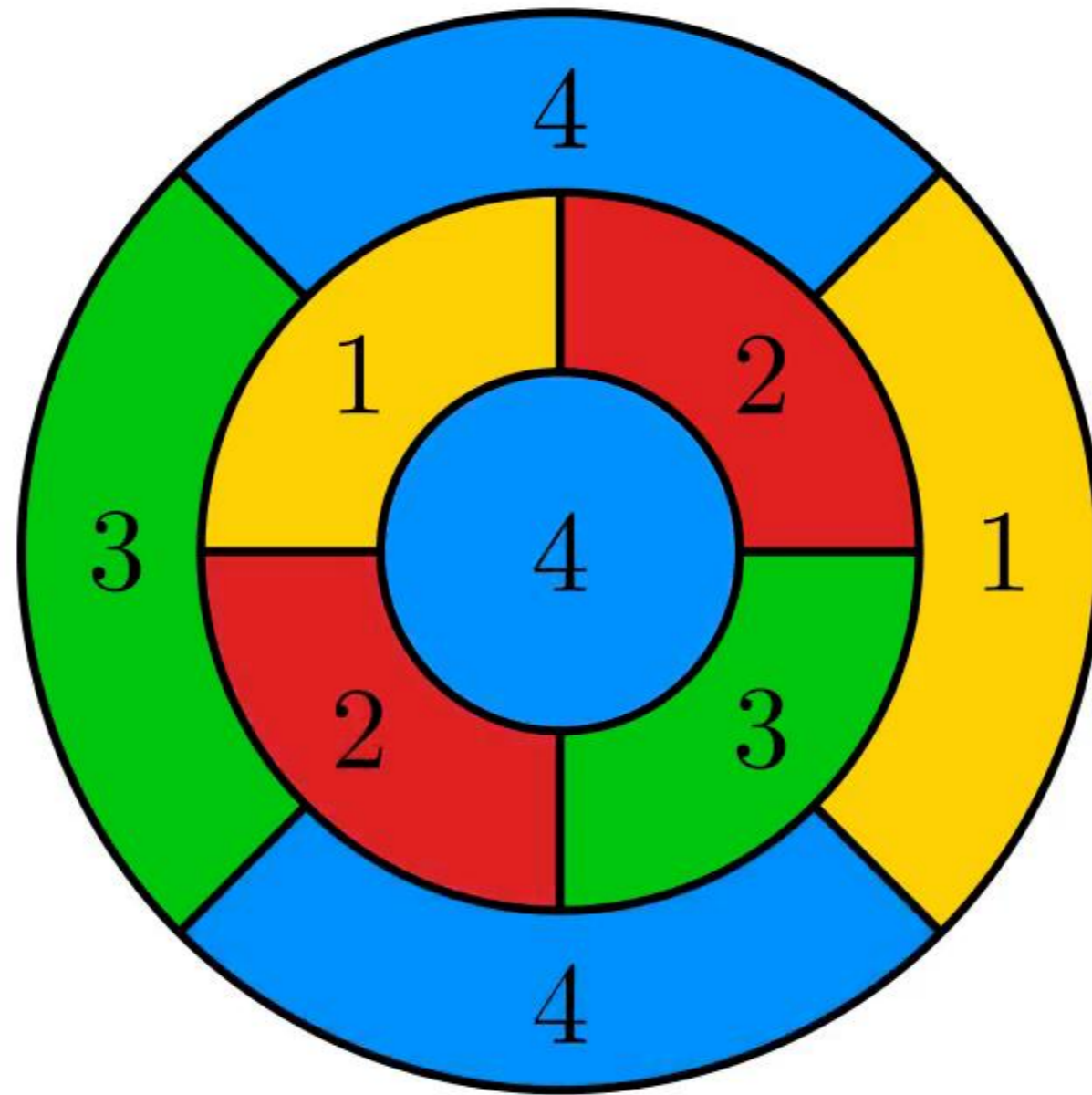
Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier cette image tel que deux régions adjacentes n'ont pas la même couleur ?



Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier cette image tel que deux régions adjacentes n'ont pas la même couleur ?



Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier cette image tel que deux régions adjacentes n'ont pas la même couleur ?



Coloration d'un graphe $G = (S, A)$

Coloration d'un graphe $G = (S, A)$

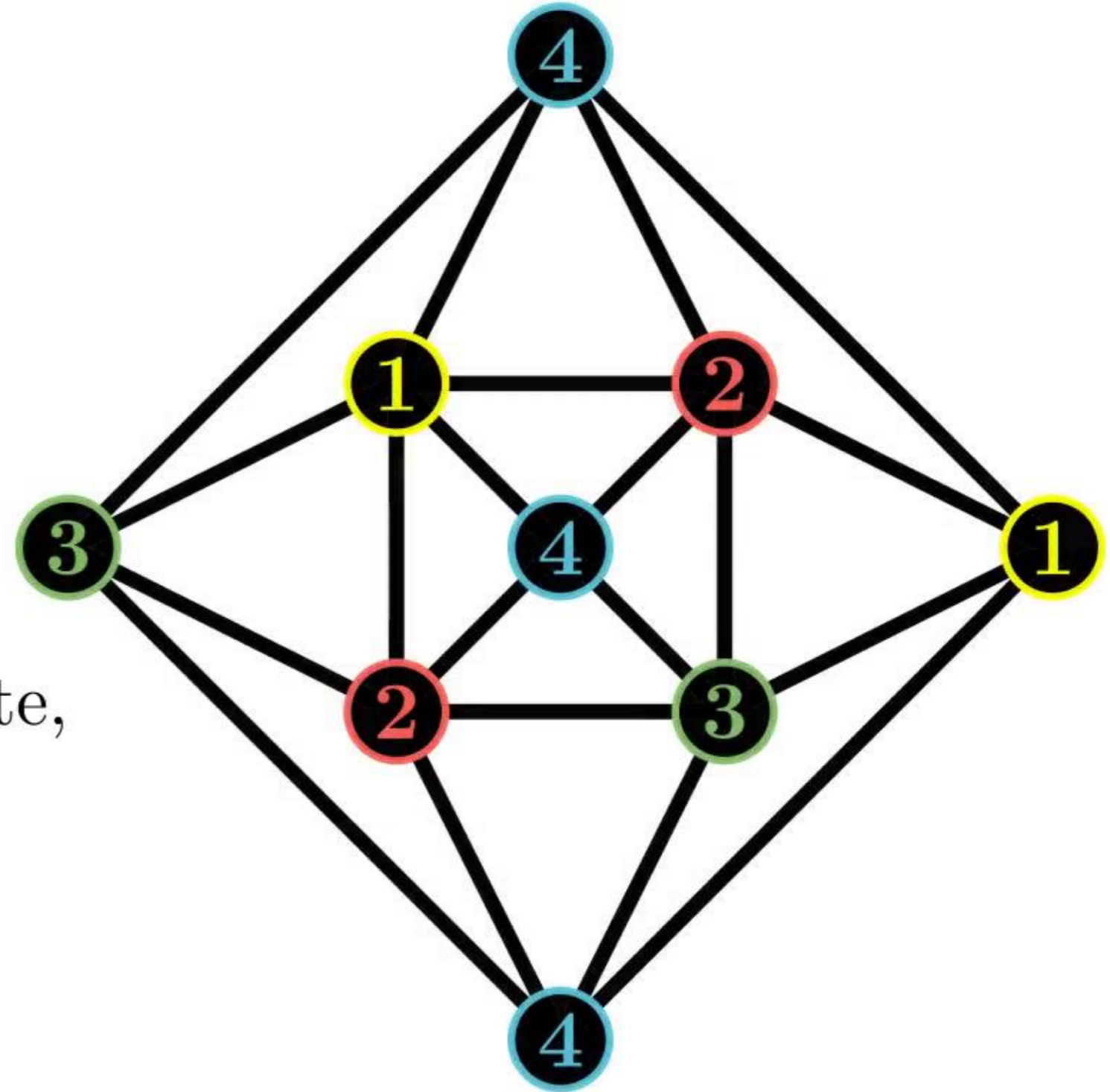
Chaque sommet a une **couleur**
(représentée par un nombre).

Si deux sommets sont reliés par une arête,
ils ont une couleur différente.

Coloration d'un graphe $G = (S, A)$

Chaque sommet a une **couleur** (représentée par un nombre).

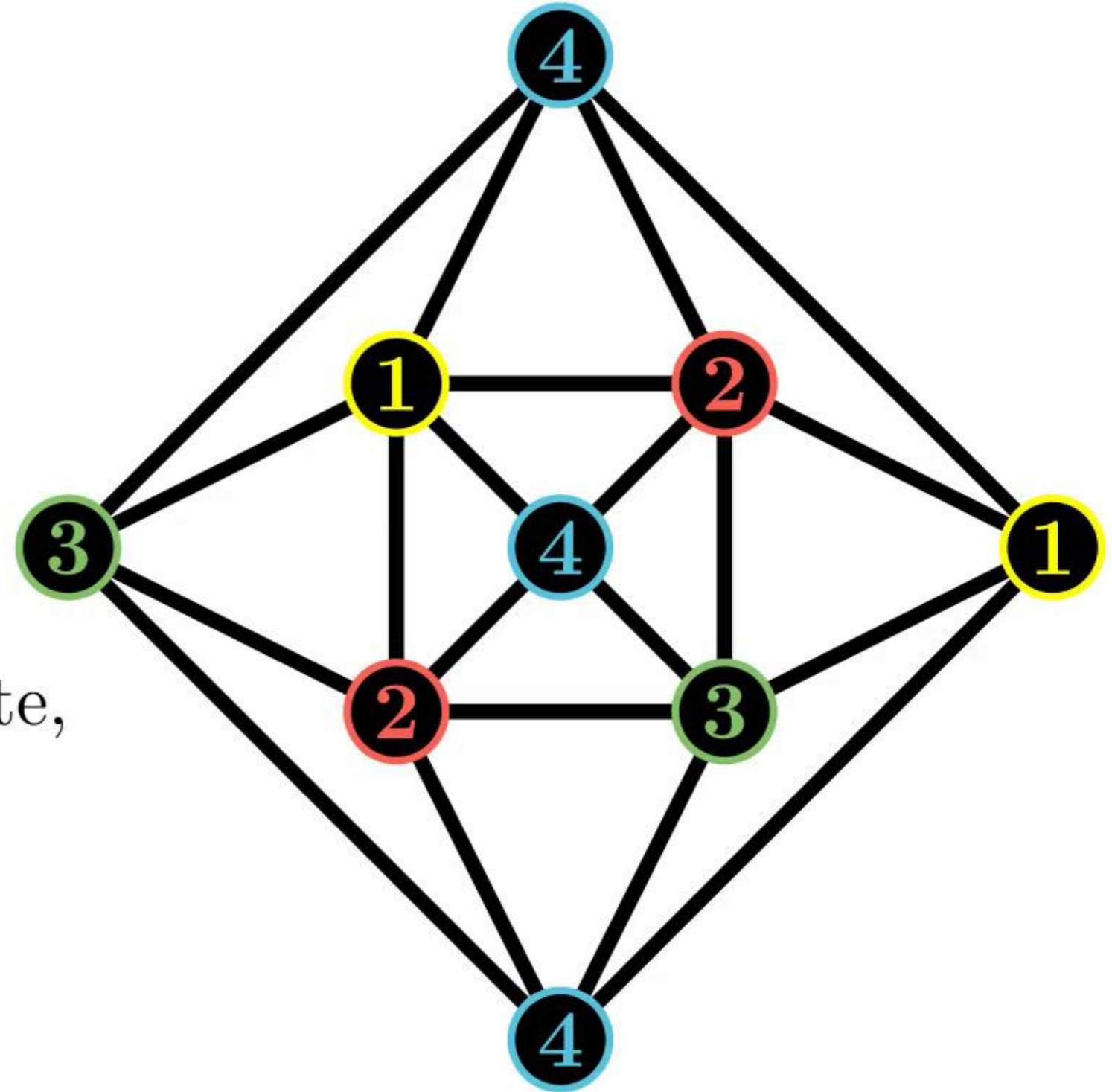
Si deux sommets sont reliés par une arête, ils ont une couleur différente.



Peut-on colorier ce graphe avec seulement 3 couleurs ?

Chaque sommet a une **couleur** (représentée par un nombre).

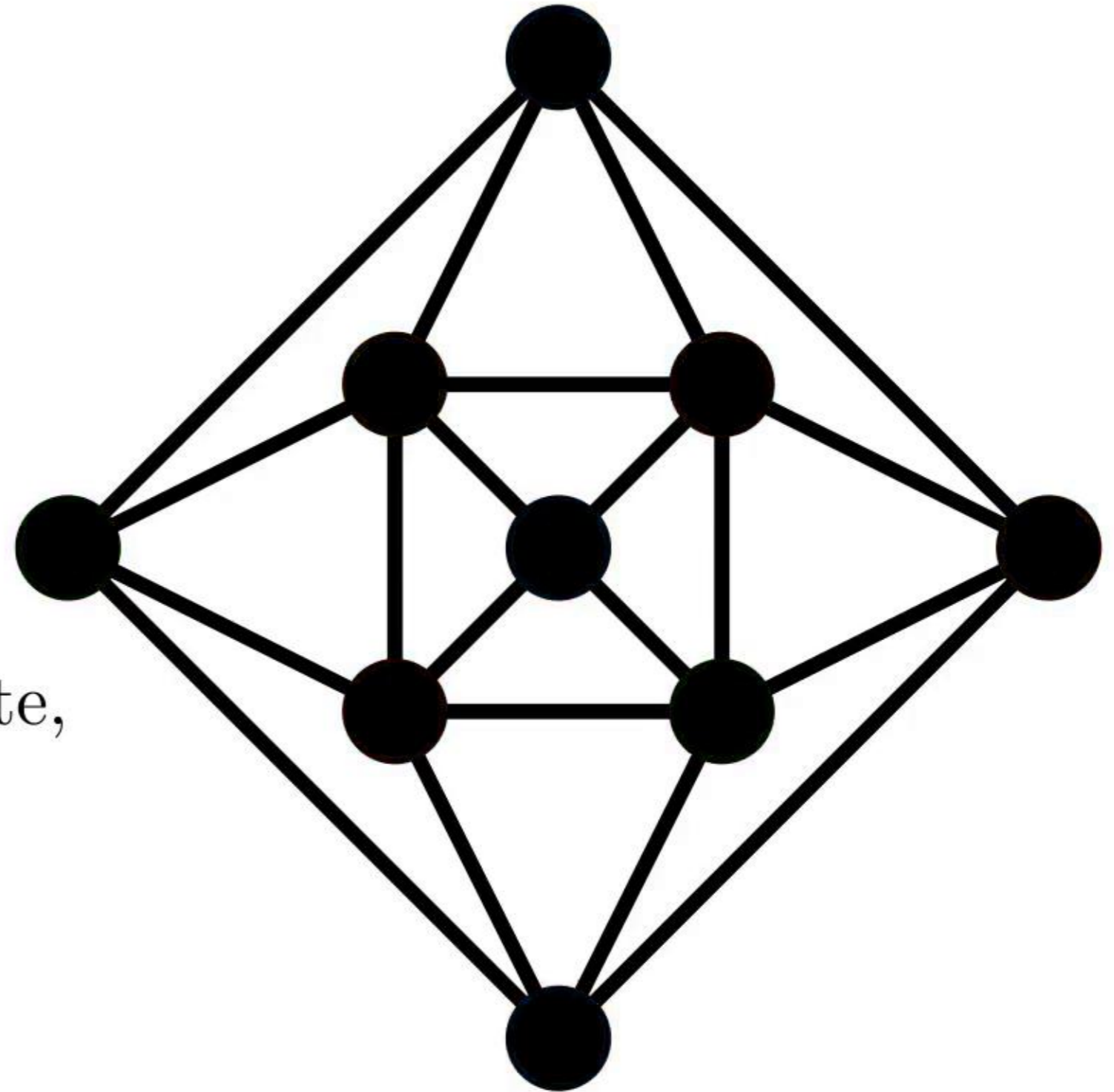
Si deux sommets sont reliés par une arête, ils ont une couleur différente.



Peut-on colorier ce graphe avec seulement 3 couleurs ?

Chaque sommet a une **couleur**
(représentée par un nombre).

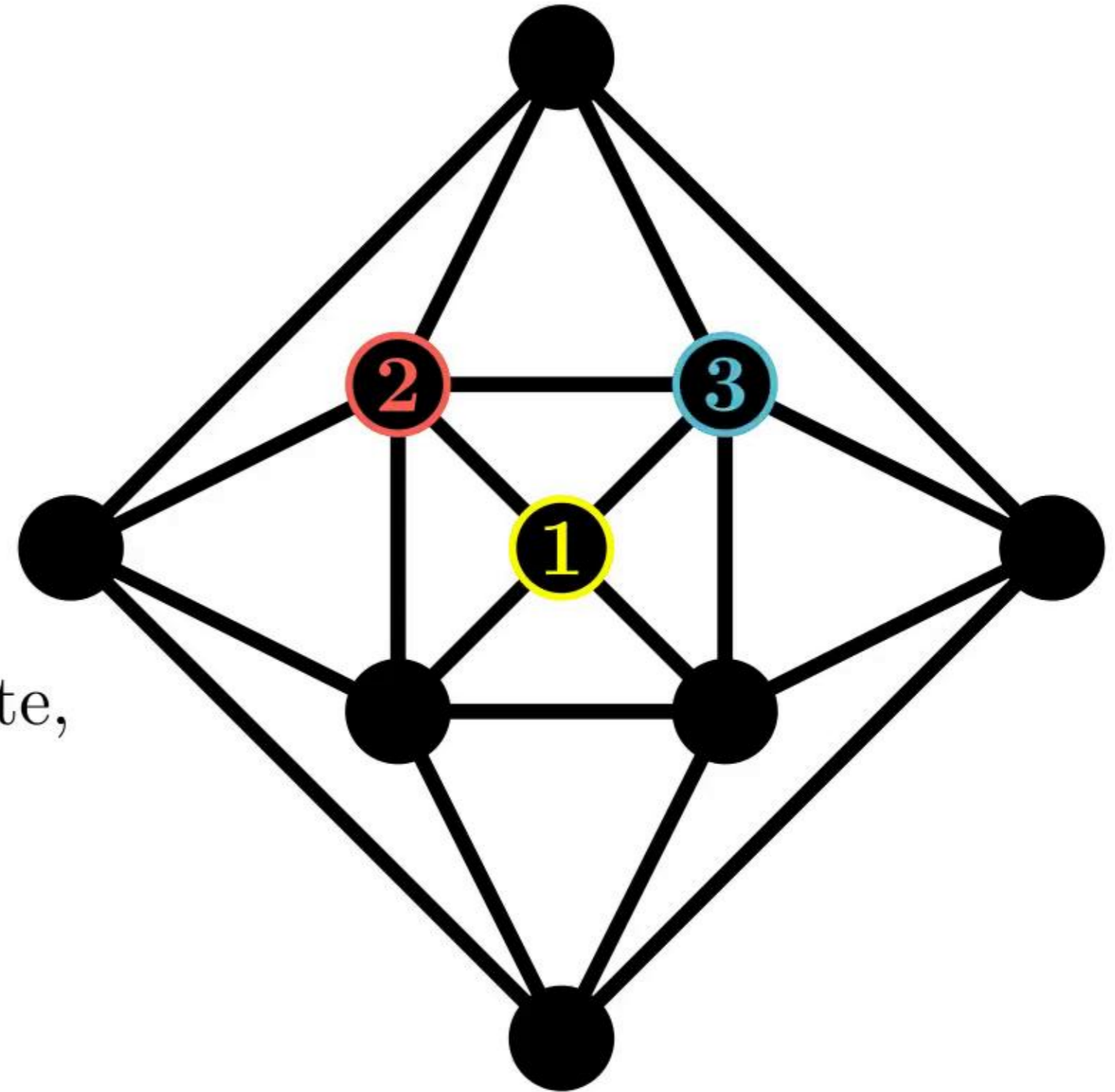
Si deux sommets sont reliés par une arête,
ils ont une couleur différente.



Peut-on colorier ce graphe avec seulement 3 couleurs ?

Chaque sommet a une **couleur** (représentée par un nombre).

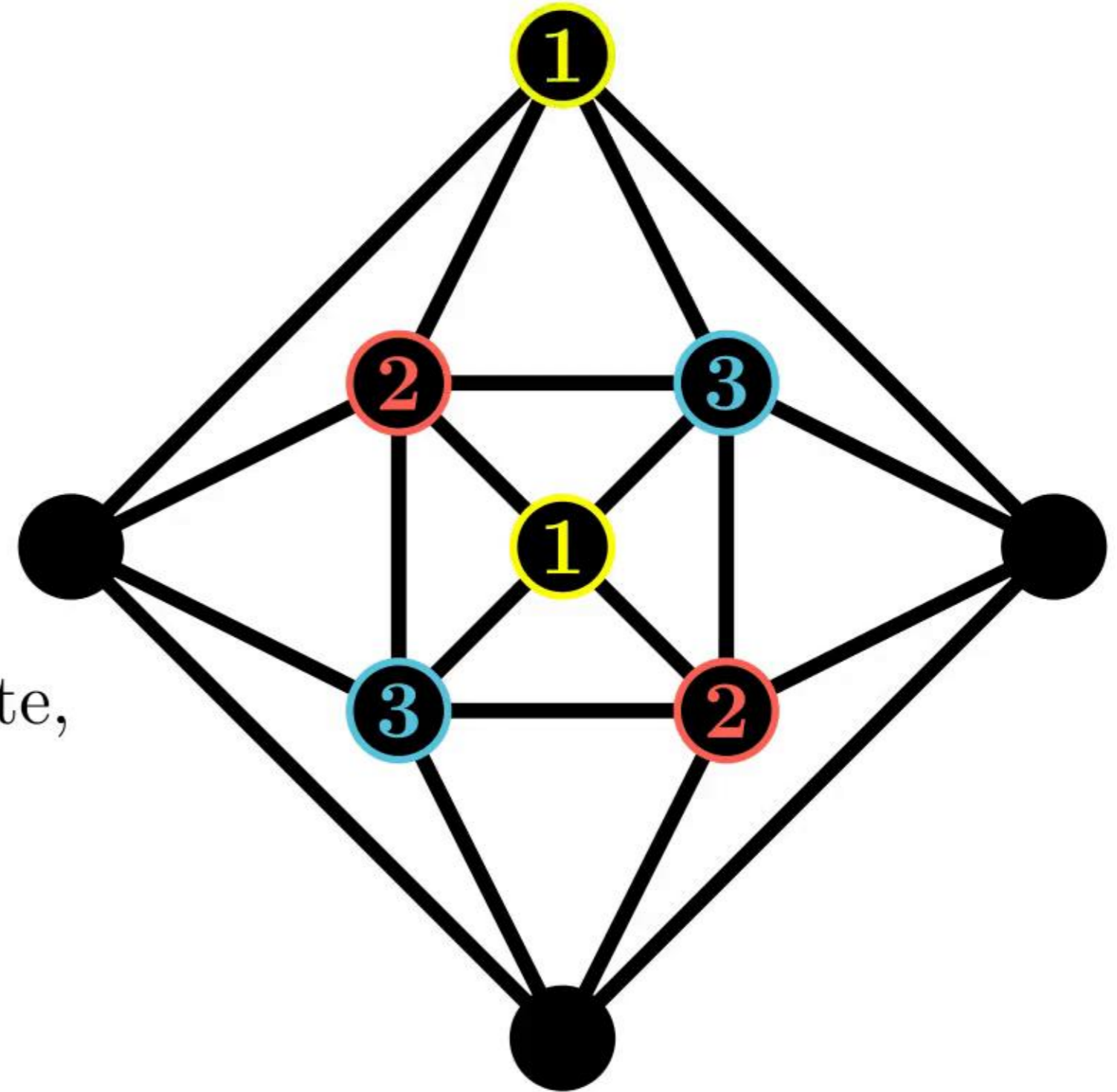
Si deux sommets sont reliés par une arête, ils ont une couleur différente.



Peut-on colorier ce graphe avec seulement 3 couleurs ?

Chaque sommet a une **couleur** (représentée par un nombre).

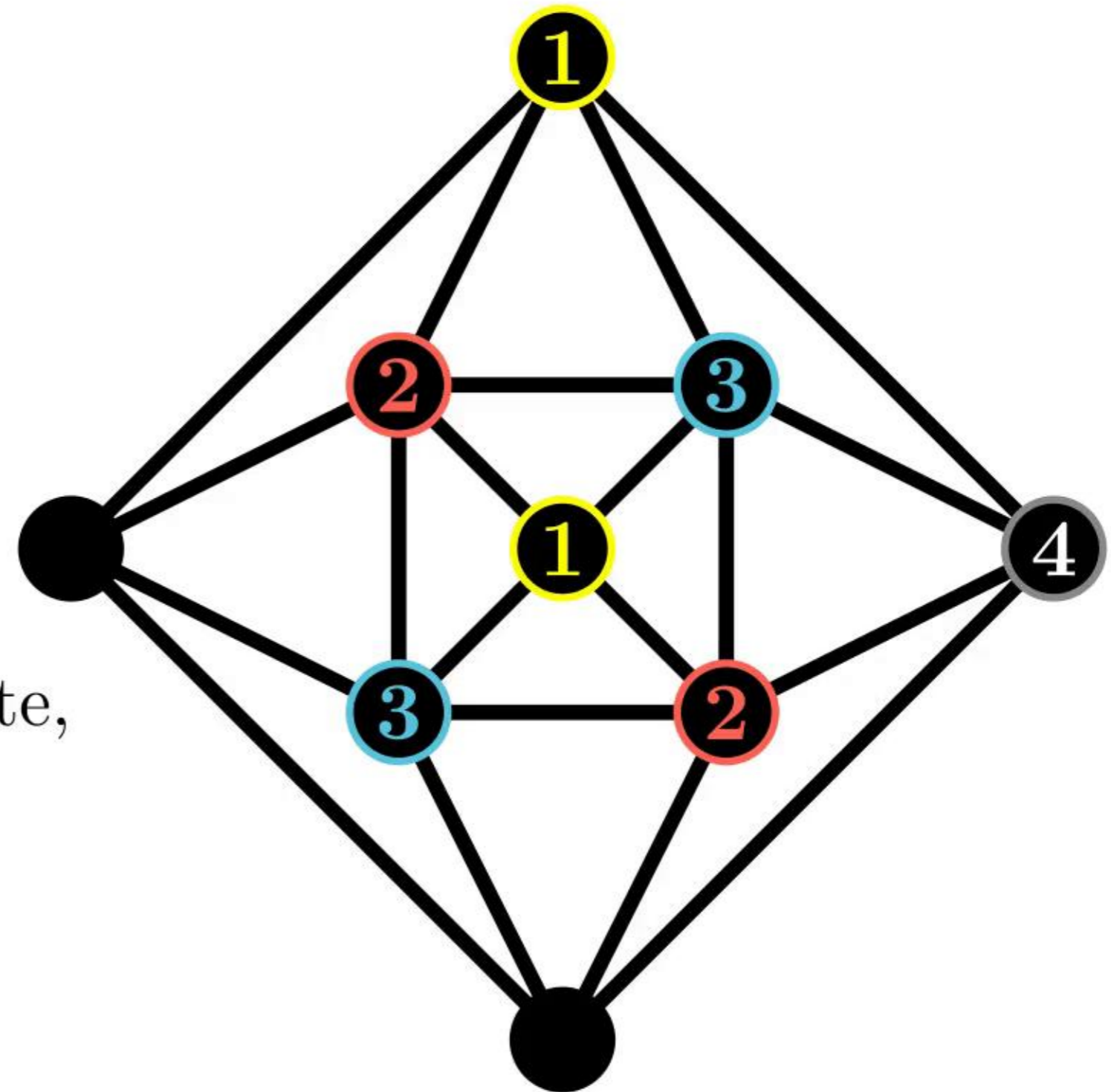
Si deux sommets sont reliés par une arête, ils ont une couleur différente.



On ne peut pas colorier ce graphe avec 3 couleurs.

Chaque sommet a une **couleur** (représentée par un nombre).

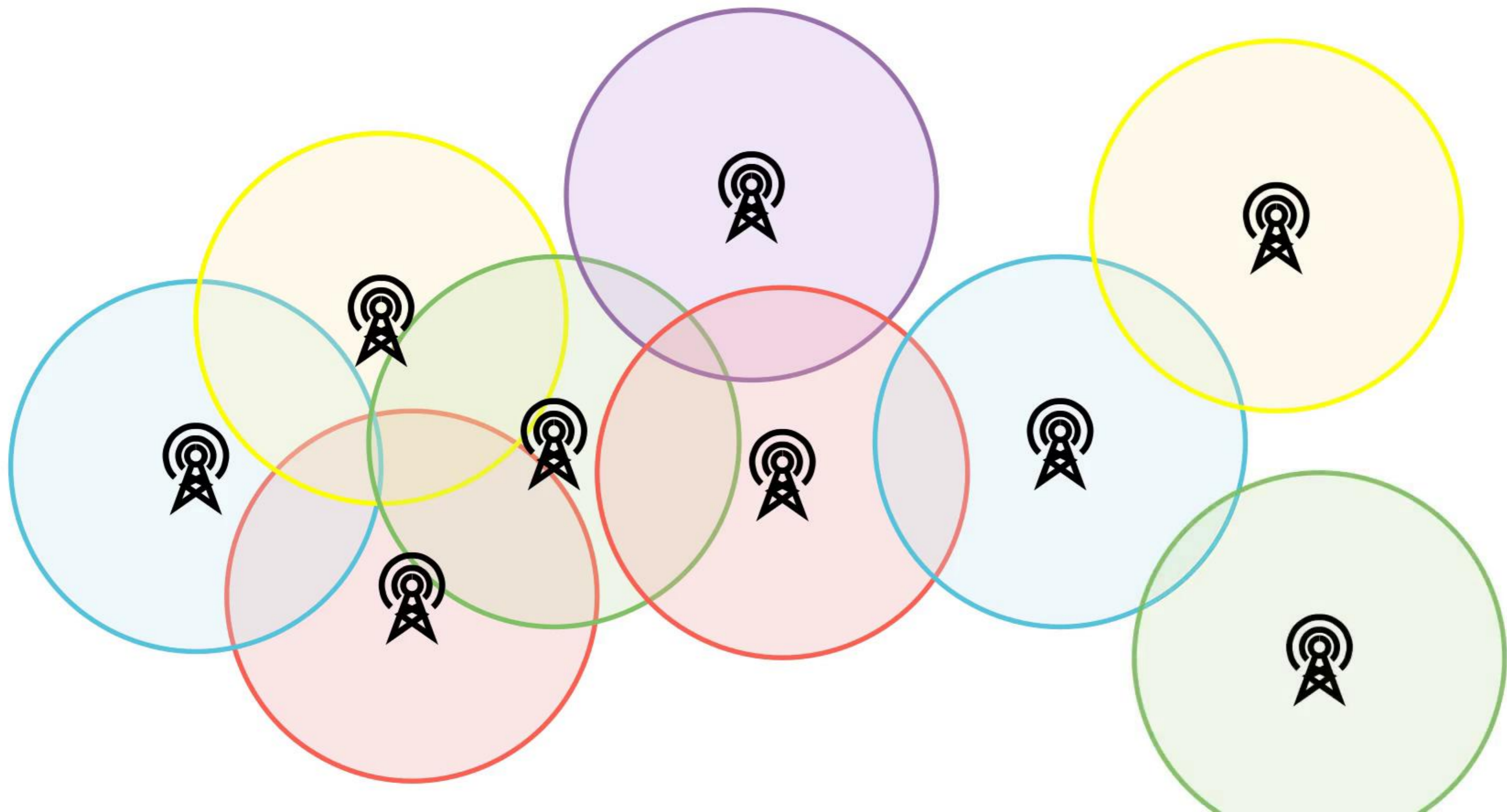
Si deux sommets sont reliés par une arête, ils ont une couleur différente.



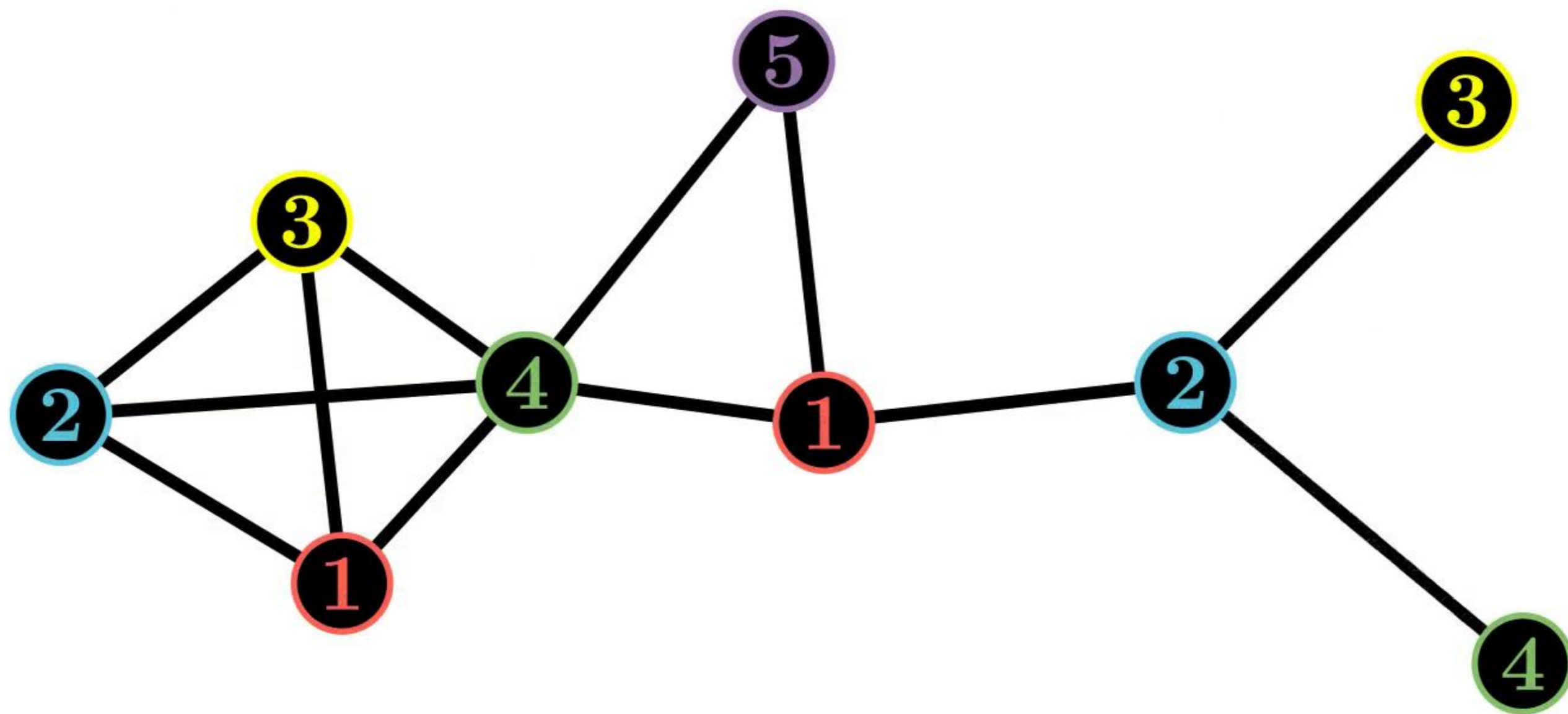
Quels autres problèmes peut-on modéliser comme minimisation du nombre de groupes compatibles ?

Achat de fréquences radio

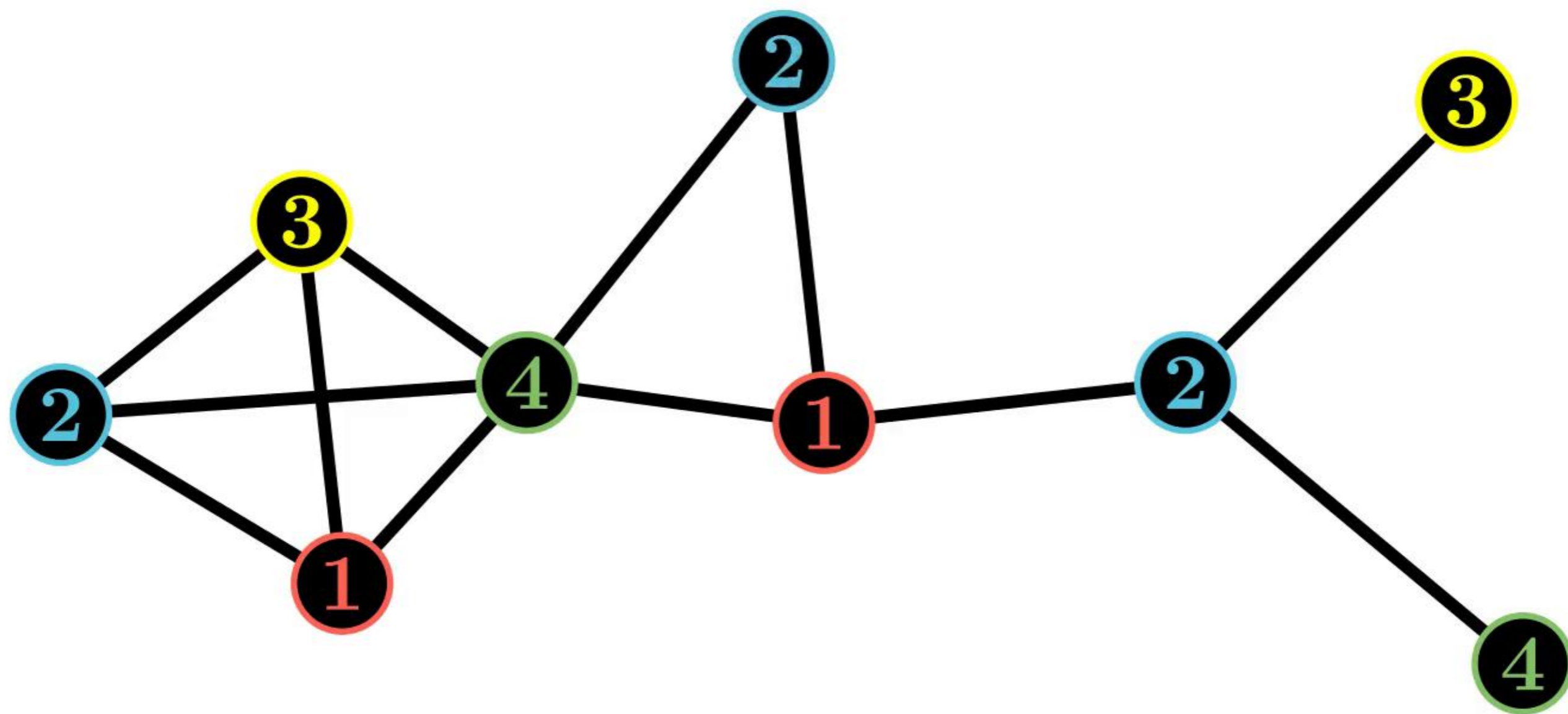
Achat de fréquences radio



Achat de fréquences radio



Achat de fréquences radio



En général, on ne sait pas résoudre ce problème rapidement.

Tous ces cours ont lieu dans le même bâtiment.
 Combien de salles faut-il, au minimum,
 pour organiser cet emploi du temps ?

Cours	Classe	Heures	Id
Mathématiques	2 GT3	08h00 - 09h00	A
Physique	1 G1	09h00 - 10h00	B
SVT	1 G3	13h00 - 15h00	C
NSI	T G3	11h00 - 12h00	D
Spé math	T G5	08h00 - 09h30	E
Physique	T G1	09h30 - 11h30	F
Secret meeting	???	12h30 - 14h00	G
Spé physique	T G2	08h00 - 10h00	H
SVT	2 GT1	11h00 - 12h00	I
Mathématiques	1 T2	13h00 - 15h00	J
Mathématiques	1 G5	10h00 - 12h00	K

Tous ces cours ont lieu dans le même bâtiment.

Combien de salles faut-il, au minimum, pour organiser cet emploi du temps ?

● **Sommets : Cours**

Cours	Classe	Heures	Id
Mathématiques	2 GT3	08h00 - 09h00	A
Physique	1 G1	09h00 - 10h00	B
SVT	1 G3	13h00 - 15h00	C
NSI	T G3	11h00 - 12h00	D
Spé math	T G5	08h00 - 09h30	E
Physique	T G1	09h30 - 11h30	F
Secret meeting	???	12h30 - 14h00	G
Spé physique	T G2	08h00 - 10h00	H
SVT	2 GT1	11h00 - 12h00	I
Mathématiques	1 T2	13h00 - 15h00	J
Mathématiques	1 G5	10h00 - 12h00	K

Tous ces cours ont lieu dans le même bâtiment.

Combien de salles faut-il, au minimum, pour organiser cet emploi du temps ?

- **Sommets** : Cours
- **Arête** (u, v) : Cours u et v intersectent

Cours	Classe	Heures	Id
Mathématiques	2 GT3	08h00 - 09h00	A
Physique	1 G1	09h00 - 10h00	B
SVT	1 G3	13h00 - 15h00	C
NSI	T G3	11h00 - 12h00	D
Spé math	T G5	08h00 - 09h30	E
Physique	T G1	09h30 - 11h30	F
Secret meeting	???	12h30 - 14h00	G
Spé physique	T G2	08h00 - 10h00	H
SVT	2 GT1	11h00 - 12h00	I
Mathématiques	1 T2	13h00 - 15h00	J
Mathématiques	1 G5	10h00 - 12h00	K

Heures	Id
08h00 - 09h00	A
09h00 - 10h00	B
13h00 - 15h00	C
11h00 - 12h00	D
08h00 - 09h30	E
09h30 - 11h30	F
12h30 - 14h00	G
08h00 - 10h00	H
11h00 - 12h00	I
13h00 - 15h00	J
10h00 - 12h00	K

Heures	Id	Salle
08h00 - 09h00	A	?
08h00 - 09h30	E	?
08h00 - 10h00	H	?
09h00 - 10h00	B	?
09h30 - 11h30	F	?
10h00 - 12h00	K	?
11h00 - 12h00	D	?
11h00 - 12h00	I	?
12h30 - 14h00	G	?
13h00 - 15h00	C	?
13h00 - 15h00	J	?

Heures	Id	Salle
08h00 - 09h00	A	?
08h00 - 09h30	E	?
08h00 - 10h00	H	?
09h00 - 10h00	B	?
09h30 - 11h30	F	?
10h00 - 12h00	K	?
11h00 - 12h00	D	?
11h00 - 12h00	I	?
12h30 - 14h00	G	?
13h00 - 15h00	C	?
13h00 - 15h00	J	?

4

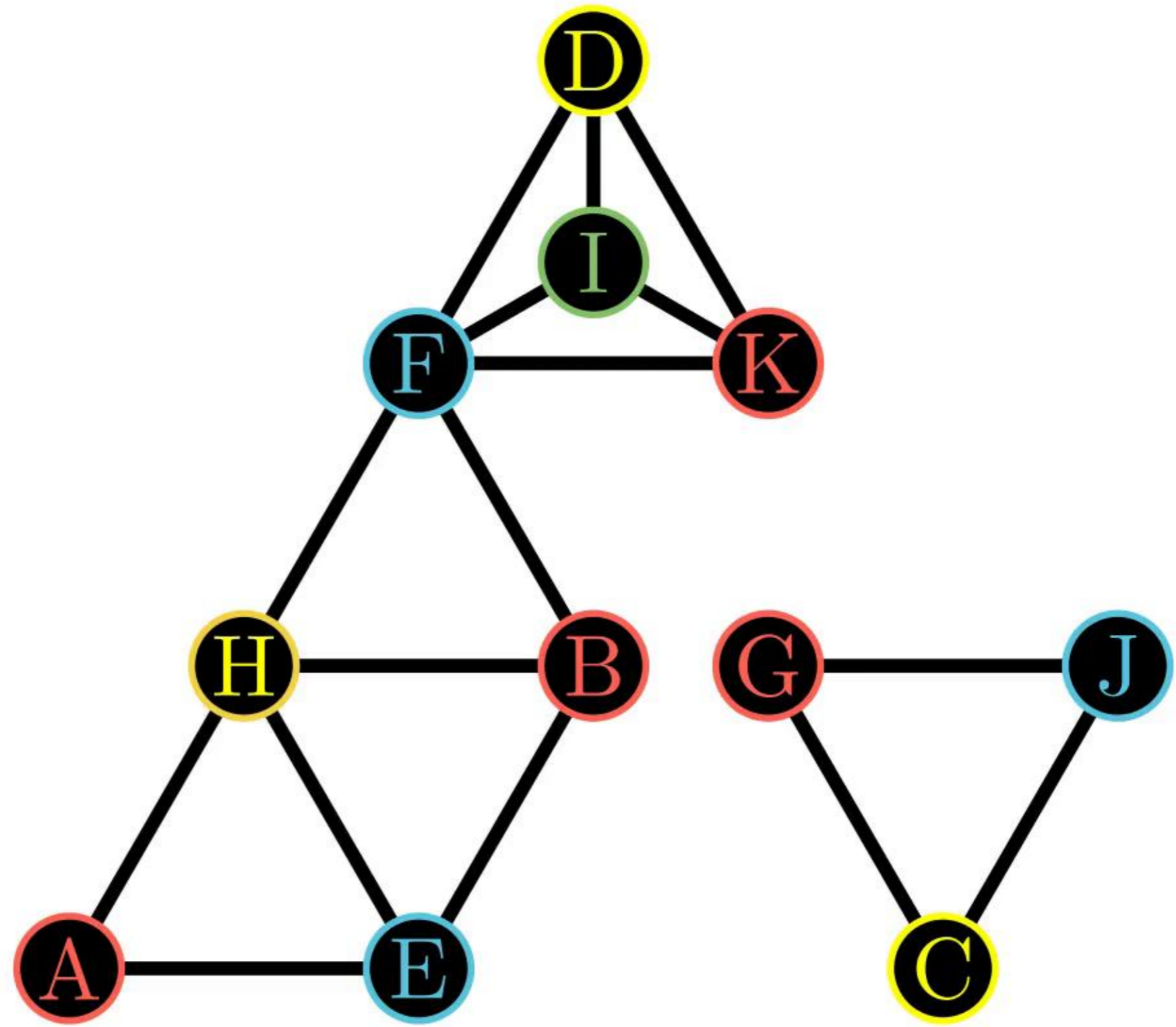
3

2

1

Heures	Id	Salle
08h00 - 09h00	A	1
08h00 - 09h30	E	2
08h00 - 10h00	H	3
09h00 - 10h00	B	1
09h30 - 11h30	F	2
10h00 - 12h00	K	1
11h00 - 12h00	D	3
11h00 - 12h00	I	4
12h30 - 14h00	G	1
13h00 - 15h00	C	2
13h00 - 15h00	J	3

4
3
2
1



Assignment de voies à des trains SNCF

- TGV 1, Compatible voies A, E
- TGV 2, Compatible voies A, B
- TER 3, Compatible voies C, D, E
- Intercité 4, Compatible voies A
- Intercité 5, Compatible voies A, B

Assignment de voies à des trains SNCF

TGV 1, Compatible voies A, E \implies Voie A

TGV 2, Compatible voies A, B \implies Voie B

TER 3, Compatible voies C, D, E \implies Voie C

Intercité 4, Compatible voies A

Intercité 5, Compatible voies A, B

Assignment de voies à des trains SNCF

TGV 1, Compatible voies A, E \implies Voie A

TGV 2, Compatible voies A, B \implies Voie B

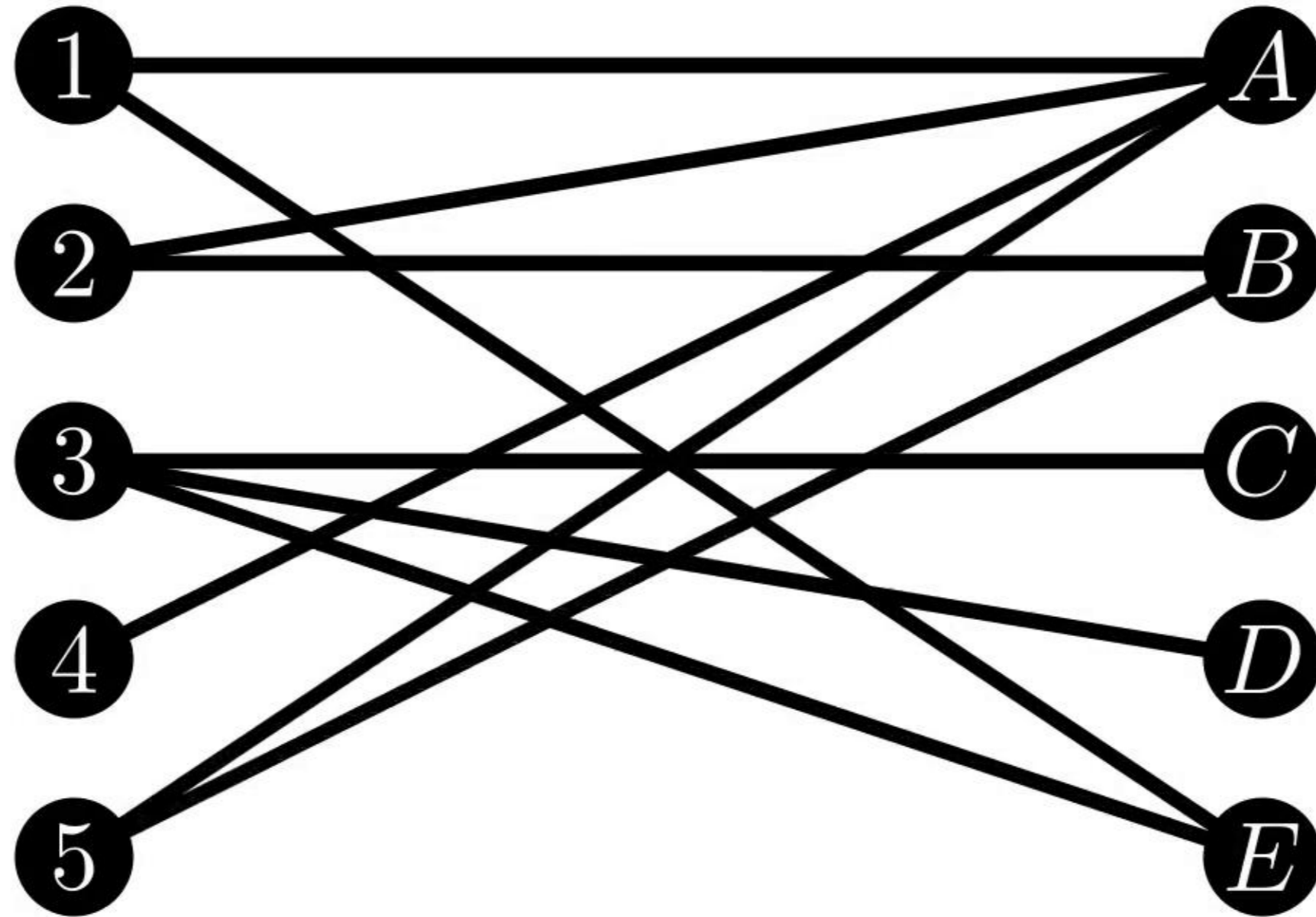
TER 3, Compatible voies C, D, E \implies Voie C

Intercité 4, Compatible voies A

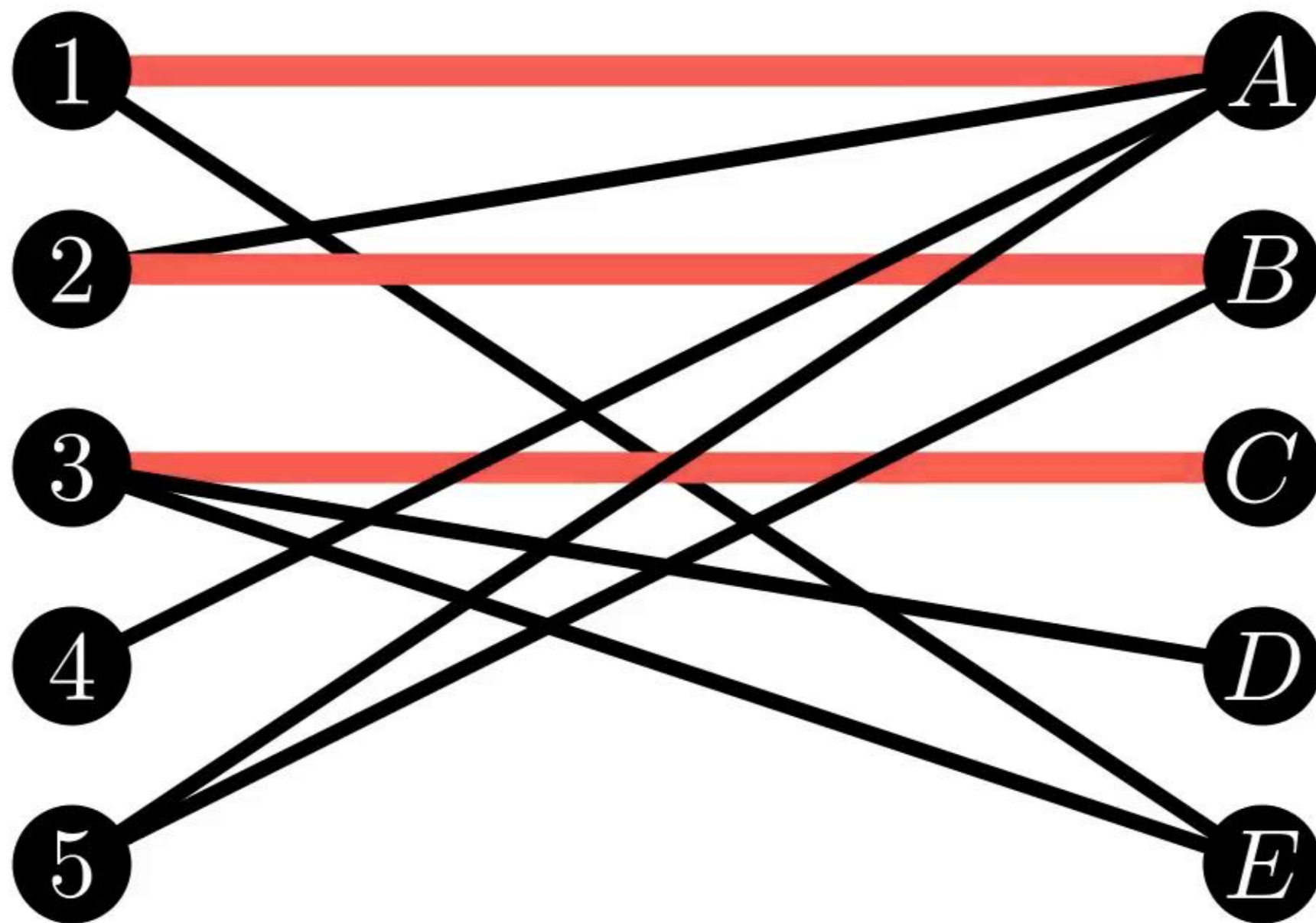
Intercité 5, Compatible voies A, B

Combien de trains peut-on assigner au maximum ?

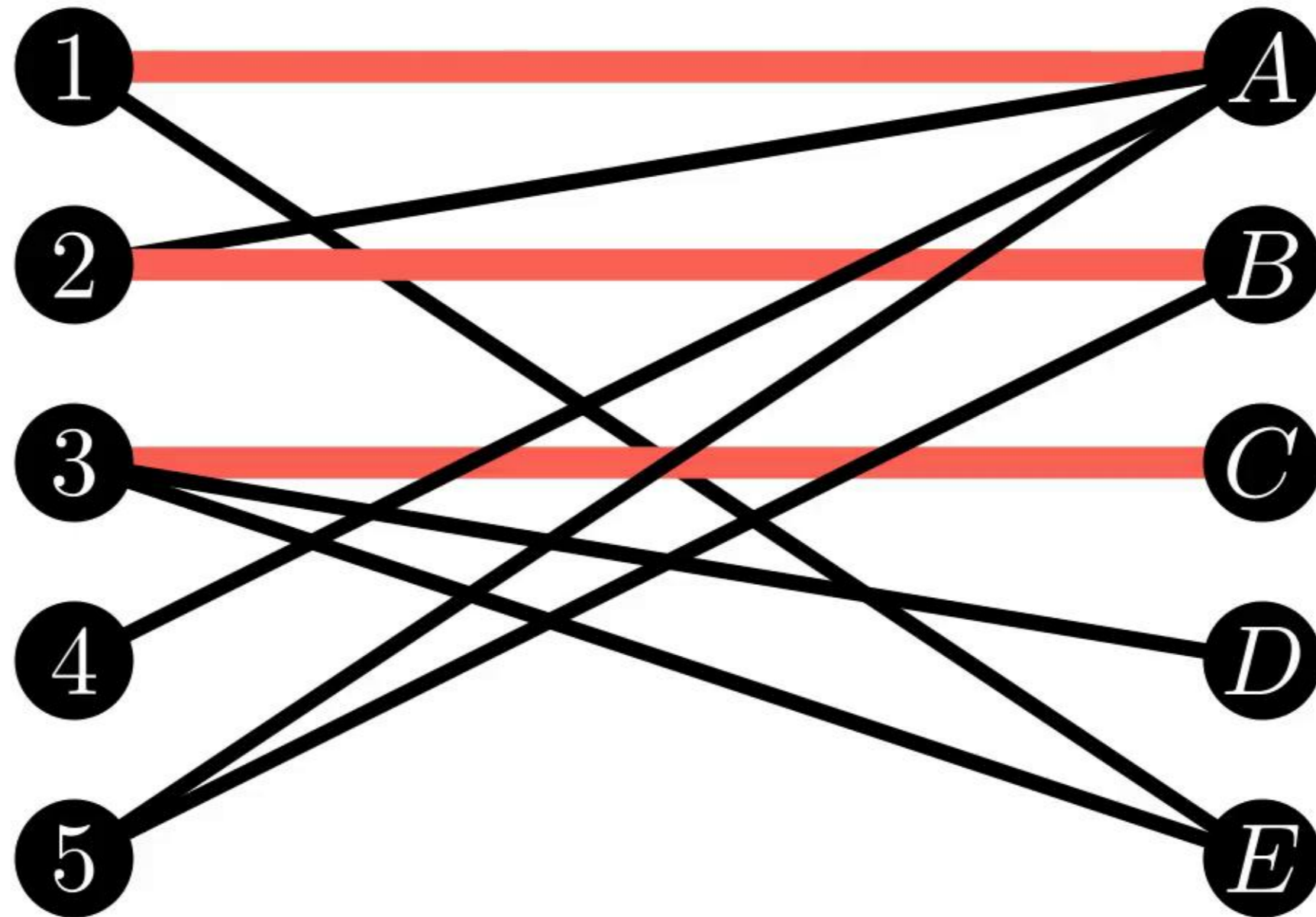
Graphe biparti $G = (S_A, S_B, A)$



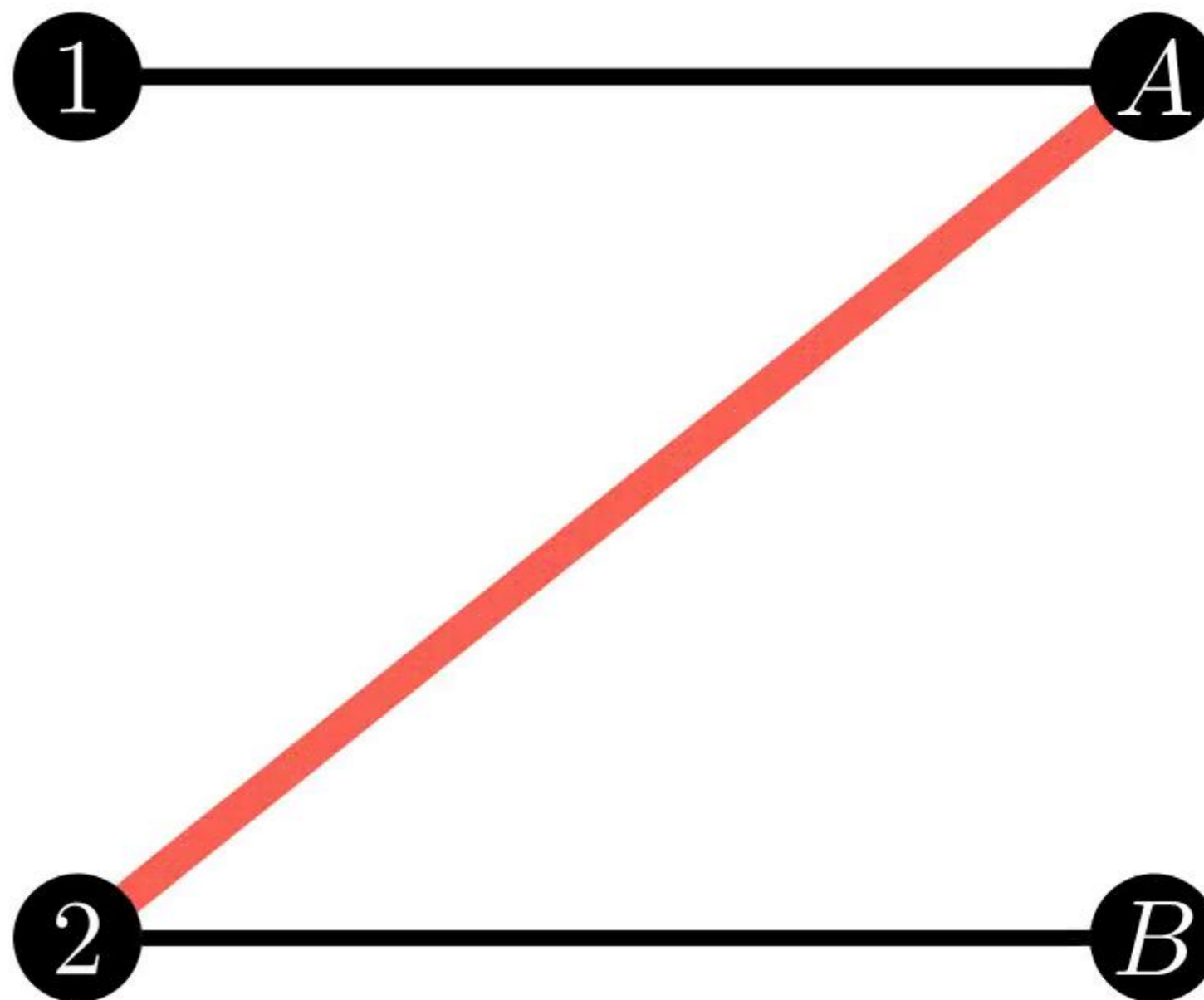
Couplage C de G



Peut-on faire mieux que 3 arêtes ?

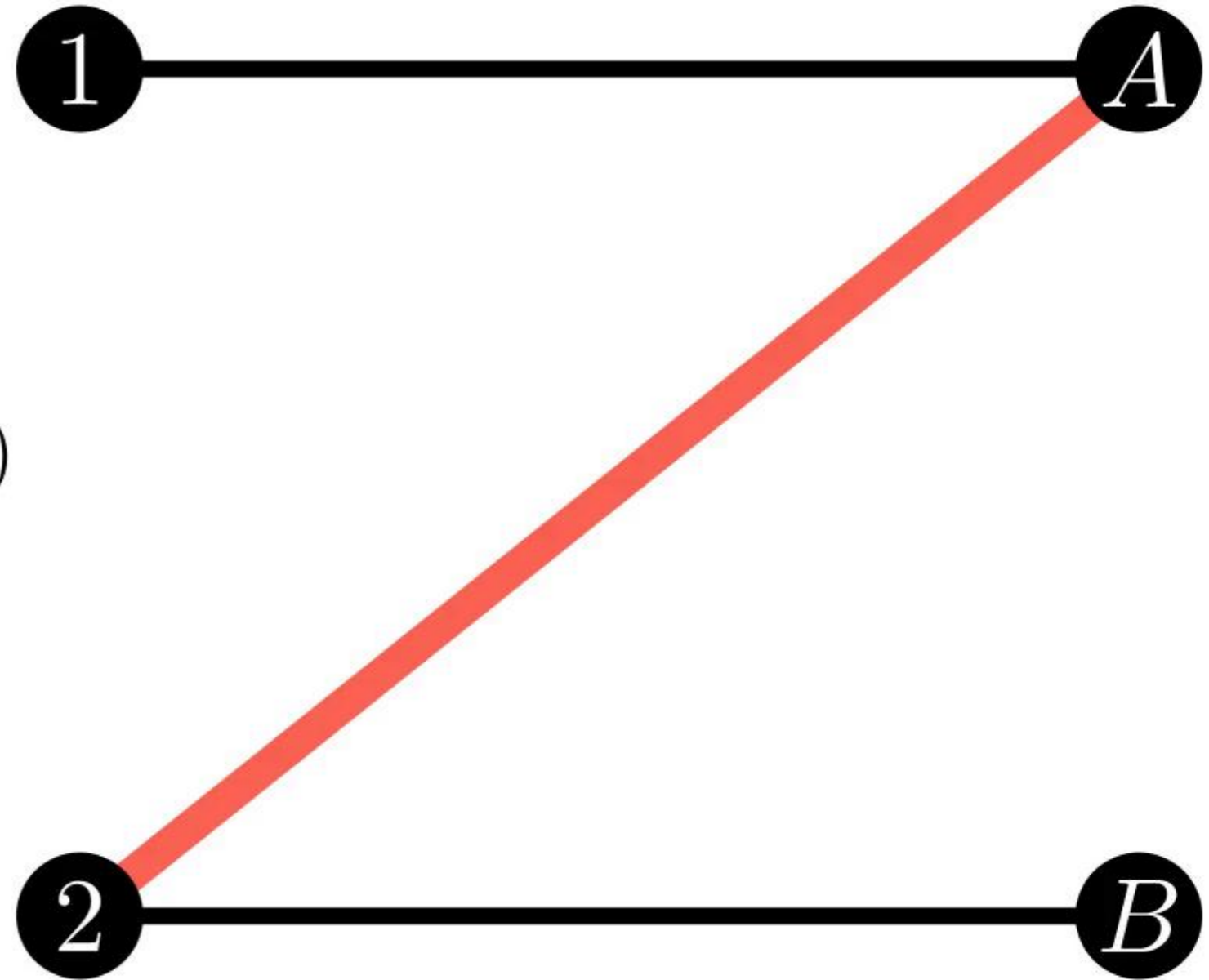


Chemin augmentant (Berge, 1957)



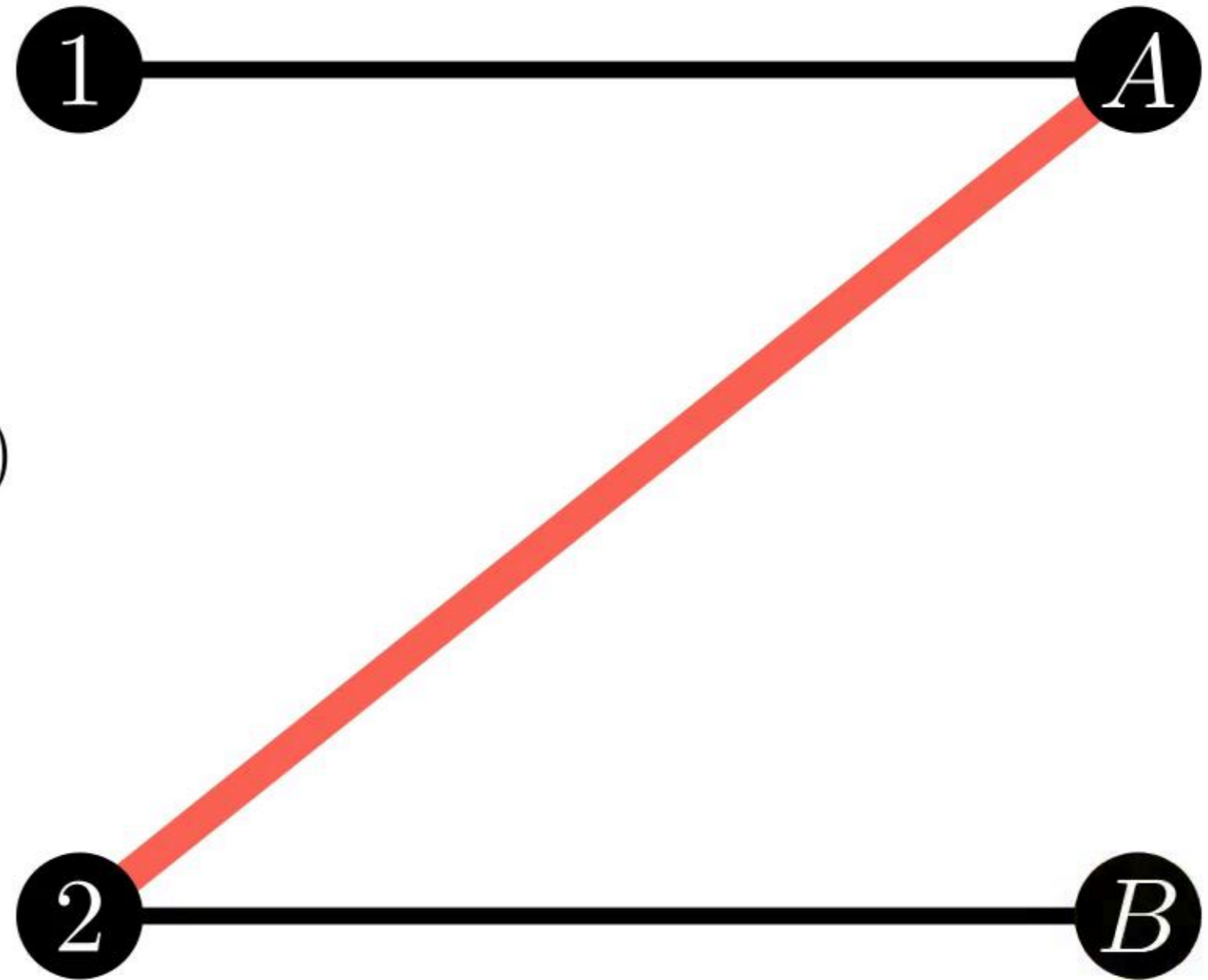
Chemin augmentant (Berge, 1957)

- Commence sur un sommet de S_A pas dans le couplage,
- Alterne entre arêtes noires (non-couple) et rouge (couple),
- Termine sur un sommet de S_B pas dans le couplage.



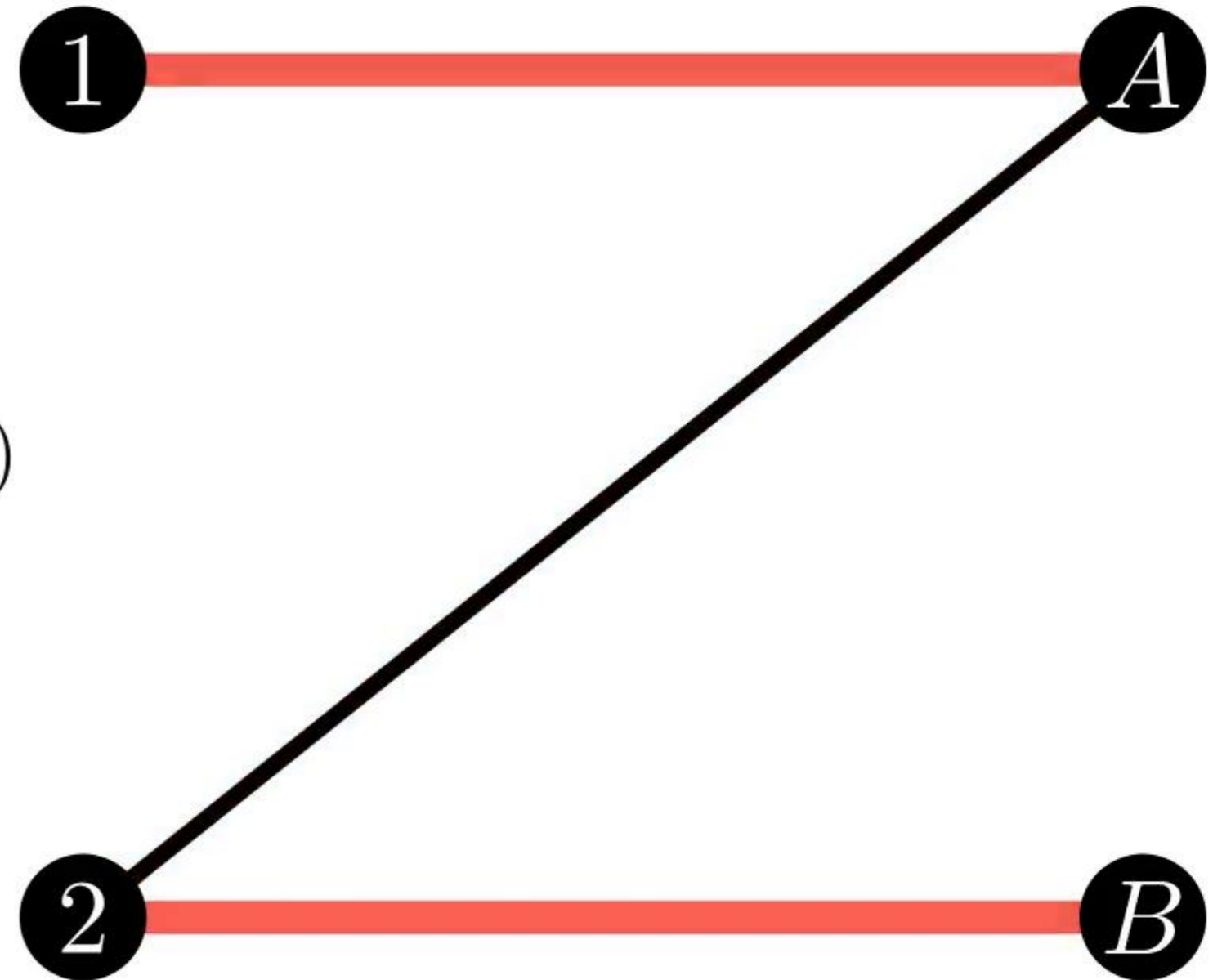
Chemin augmentant (Berge, 1957)

- Commence sur un sommet de S_A pas dans le couplage,
- Alterne entre arêtes noires (non-couple) et rouge (couple),
- Termine sur un sommet de S_B pas dans le couplage.

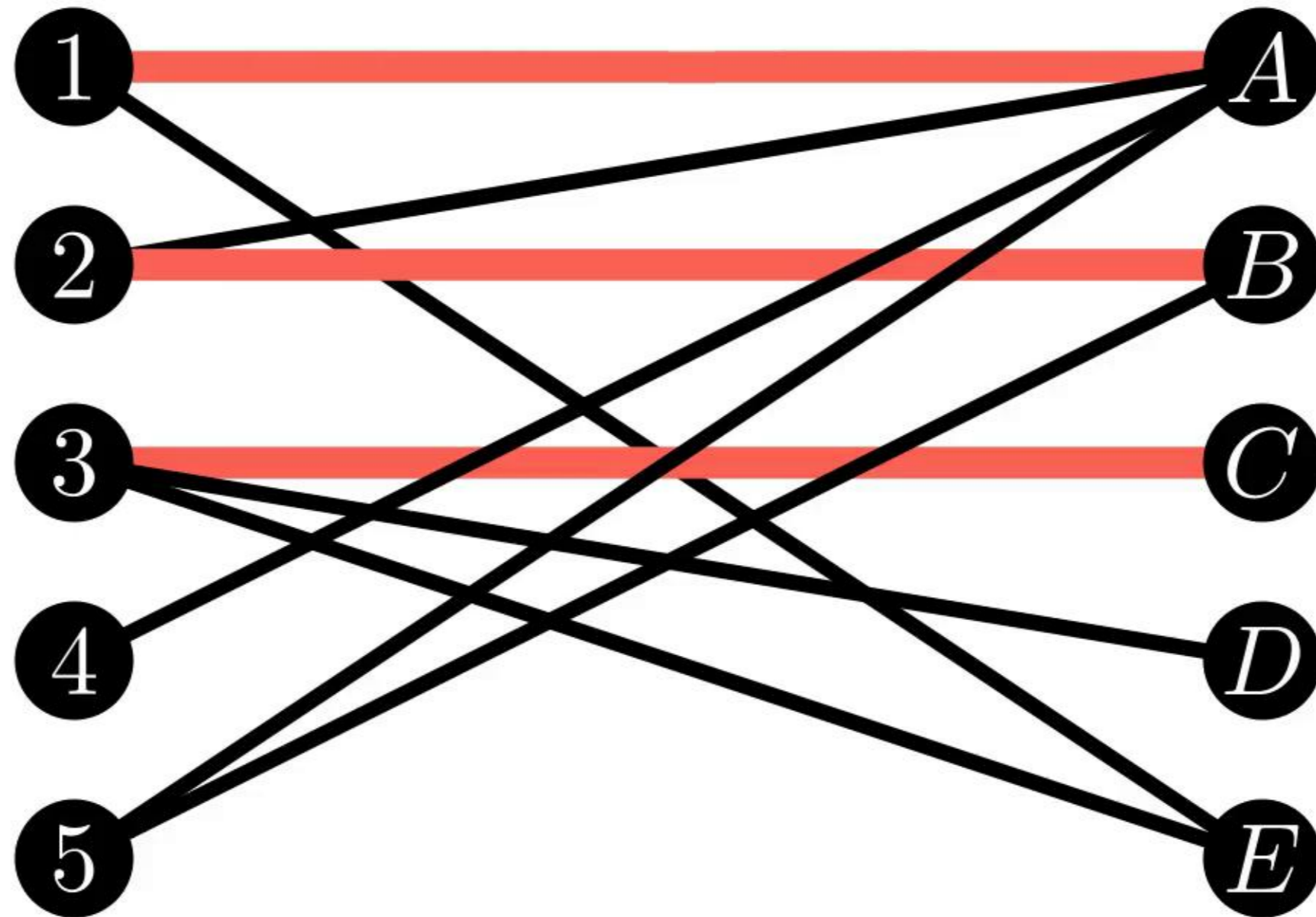


Chemin augmentant (Berge, 1957)

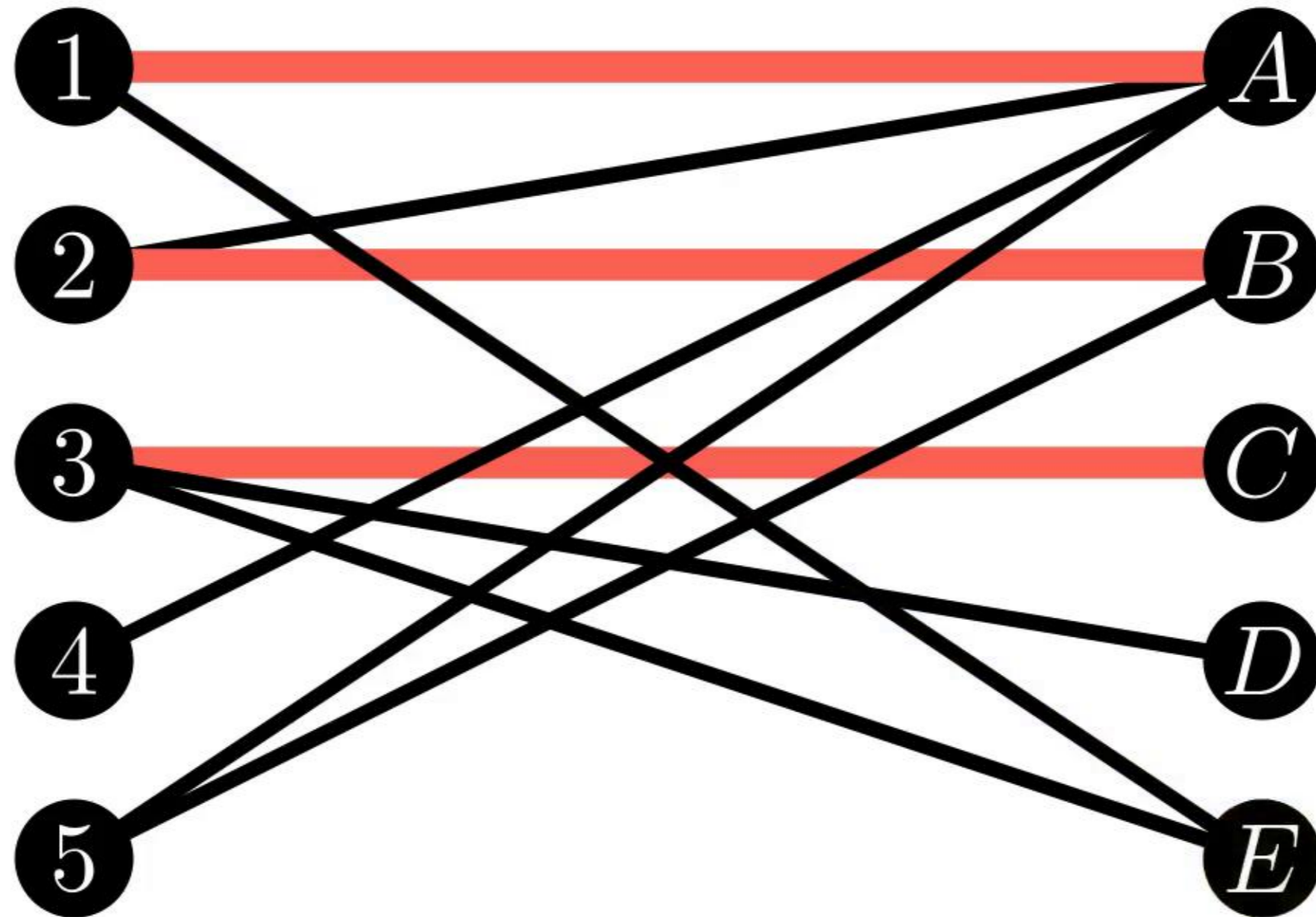
- Commence sur un sommet de S_A pas dans le couplage,
- Alterne entre arêtes noires (non-couple) et rouge (couple),
- Termine sur un sommet de S_B pas dans le couplage.



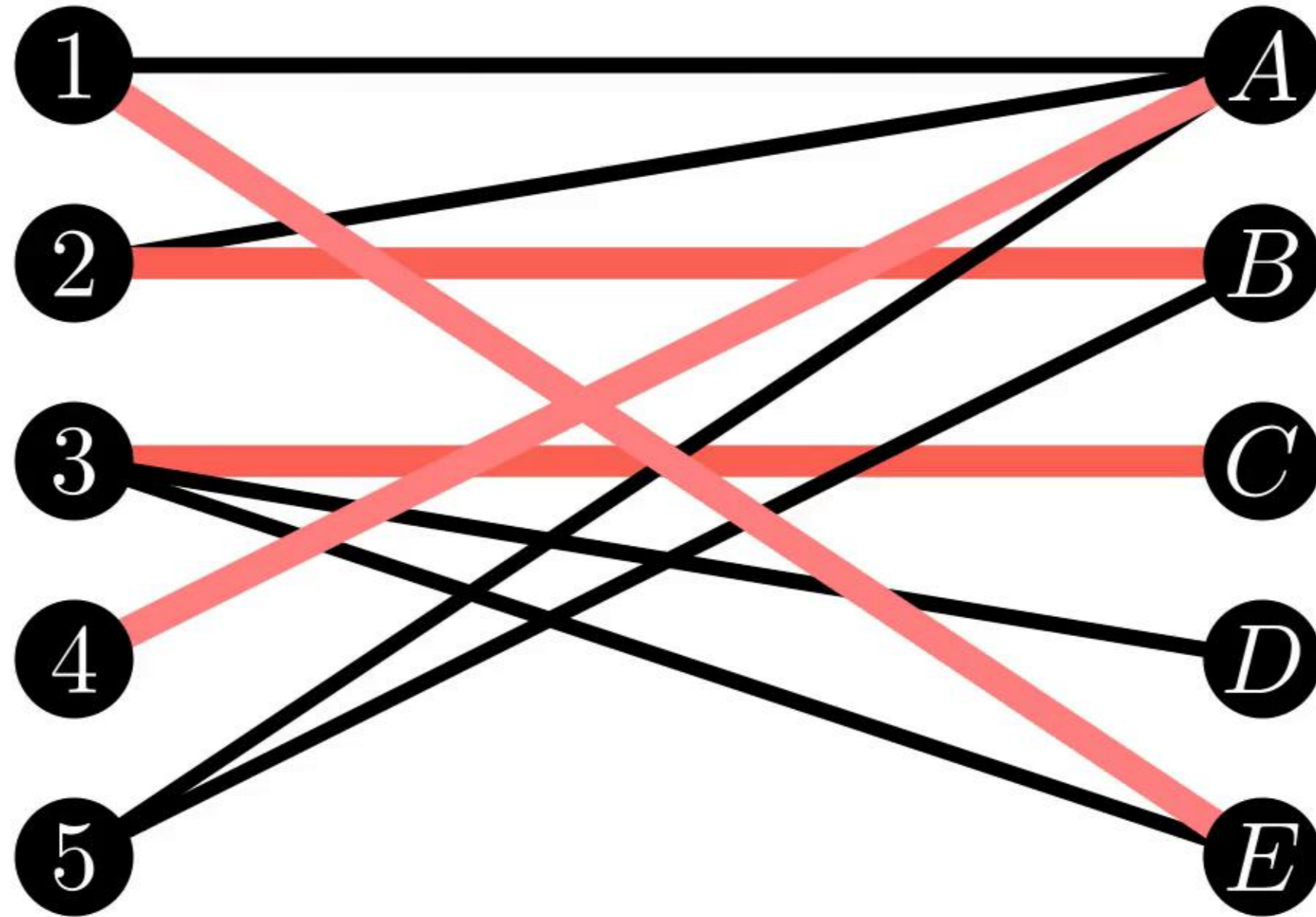
Peut-on faire mieux que 3 arêtes ?



Peut-on faire mieux que 3 arêtes ?



Oui, on peut avoir 4 arêtes.



Antoine

Préfère: **Émilie** > **Flora** > **Gaëlle**

Benoit

Préfère: **Flora** > **Gaëlle** > **Émilie**

Clément

Préfère: **Émilie** > **Gaëlle** > **Flora**

Émilie

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Flora

Préfère: **Benoit** > **Antoine** > **Clément**

Gaëlle

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

(Merci à Nadia Brauner pour l'inspiration pour ces slides)

On souhaite marier tout le monde.
Comment former les couples ?

Antoine

Préfère: **Émilie** > **Flora** > **Gaëlle**

Benoit

Préfère: **Flora** > **Gaëlle** > **Émilie**

Clément

Préfère: **Émilie** > **Gaëlle** > **Flora**

Émilie

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Flora

Préfère: **Benoit** > **Antoine** > **Clément**

Gaëlle

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

(Merci à Nadia Brauner pour l'inspiration pour ces slides)

Intuitivement, les hommes marient à tour de rôle
la femme qu'il préfère.

Antoine

Préfère: **Émilie** > **Flora** > **Gaëlle**

Benoit

Préfère: **Flora** > **Gaëlle** > **Émilie**

Clément

Préfère: **Émilie** > **Gaëlle** > **Flora**

Émilie

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Flora

Préfère: **Benoit** > **Antoine** > **Clément**

Gaëlle

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Intuitivement, les hommes marient à tour de rôle
la femme qu'il préfère.

Antoine

Préfère: **Émilie** > **Flora** > **Gaëlle**

Benoit

Préfère: **Flora** > **Gaëlle** > **Émilie**

Clément

Préfère: **Émilie** > **Gaëlle** > **Flora**

Émilie

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Flora

Préfère: **Benoit** > **Antoine** > **Clément**

Gaëlle

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

(Merci à Nadia Brauner pour l'inspiration pour ces slides)

Et là, c'est le drame.

Clément et Émilie entament une liaison dangereuse...

Antoine

Préfère: **Émilie** > **Flora** > **Gaëlle**

Benoit

Préfère: **Flora** > **Gaëlle** > **Émilie**

Clément

Préfère: **Émilie** > **Gaëlle** > **Flora**

Émilie

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Flora

Préfère: **Benoit** > **Antoine** > **Clément**

Gaëlle

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

(Merci à Nadia Brauner pour l'inspiration pour ces slides)

Et là, c'est le drame.

Clément et Émilie entament une liaison dangereuse...

On souhaite organiser des relations **stables**.

Antoine

Préfère: **Émilie** > **Flora** > **Gaëlle**

Benoit

Préfère: **Flora** > **Gaëlle** > **Émilie**

Clément

Préfère: **Émilie** > **Gaëlle** > **Flora**

Émilie

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Flora

Préfère: **Benoit** > **Antoine** > **Clément**

Gaëlle

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Couplage **instable**

F est en couple avec g

G est en couple avec f

F préfère G à g

G préfère F à f

Antoine

Préfère: **Émilie** > **Flora** > **Gaëlle**

Benoit

Préfère: **Flora** > **Gaëlle** > **Émilie**

Clément

Préfère: **Émilie** > **Gaëlle** > **Flora**

Émilie

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Flora

Préfère: **Benoit** > **Antoine** > **Clément**

Gaëlle

Préfère: **Clément** > **Antoine** > **Benoit**

Comment trouver un couplage stable ?

Comment trouver un couplage stable ?

$E > F > G$ **A**

$F > G > E$ **B**

$E > G > F$ **C**

E $B > C > A$

F $C > A > B$

G $A > C > B$

Comment trouver un couplage stable ?

Chaque homme célibataire propose à la femme qu'il préfère parmi celles qui ne l'ont pas encore refusé.

E > F > G **A**

F > G > E **B**

E > G > F **C**

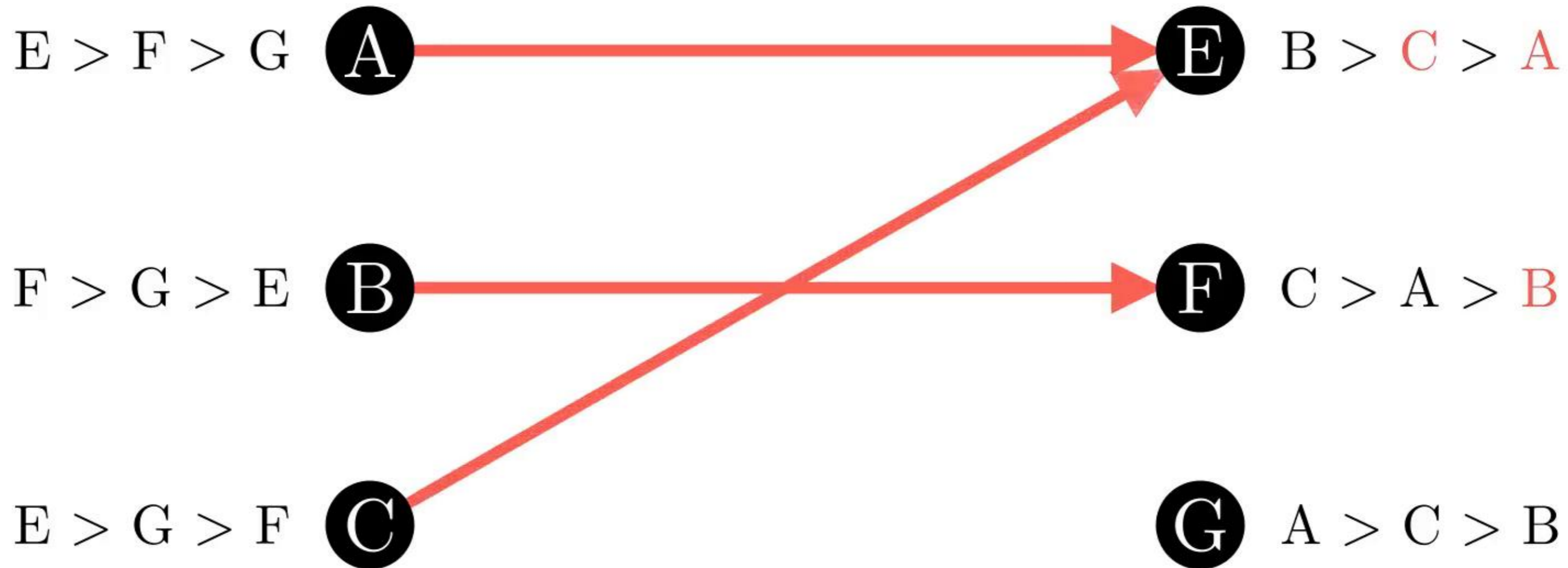
E B > C > A

F C > A > B

G A > C > B

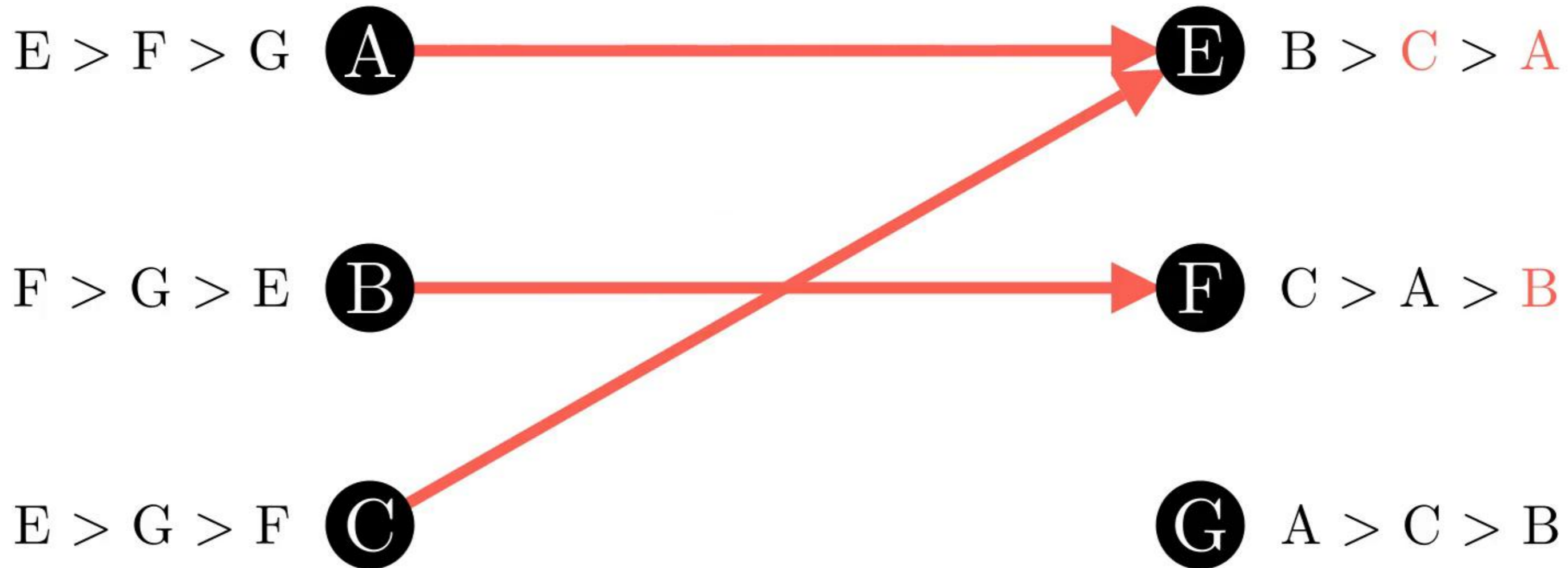
Comment trouver un couplage stable ?

Chaque homme célibataire propose à la femme qu'il préfère parmi celles qui ne l'ont pas encore refusé.



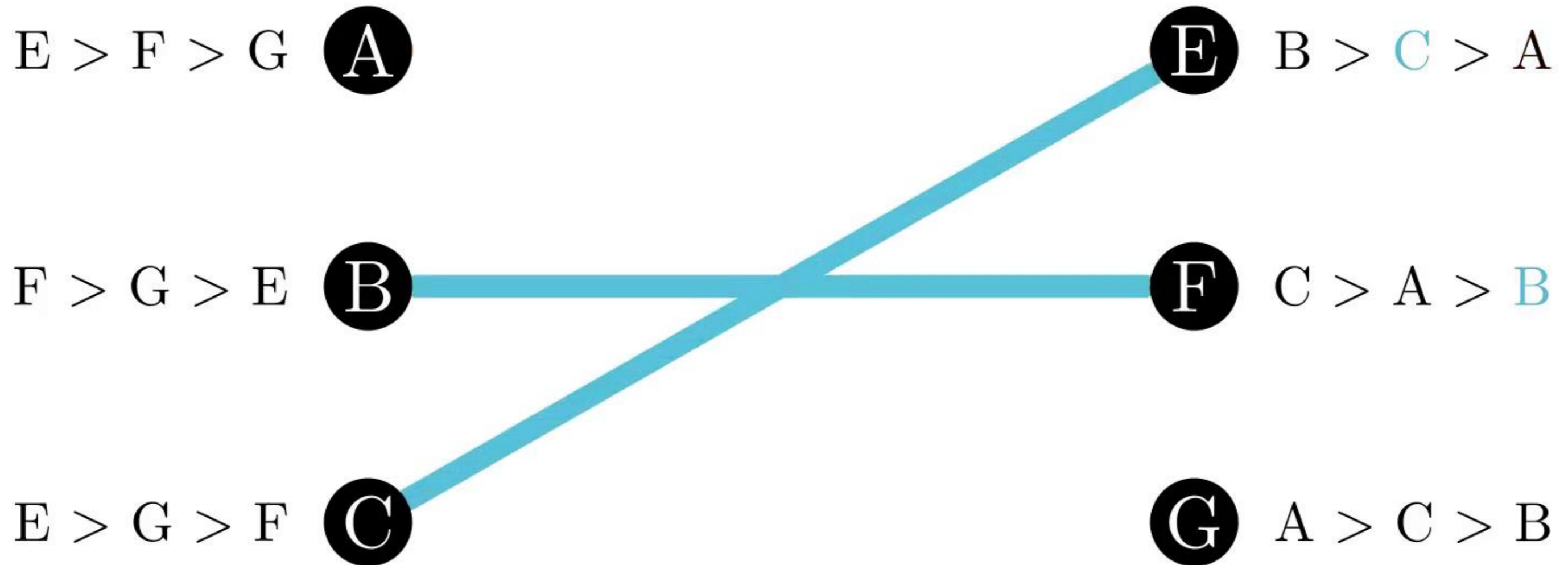
Comment trouver un couplage stable ?

Chaque femme se met en couple avec l'homme préféré parmi ceux qui ont proposé.



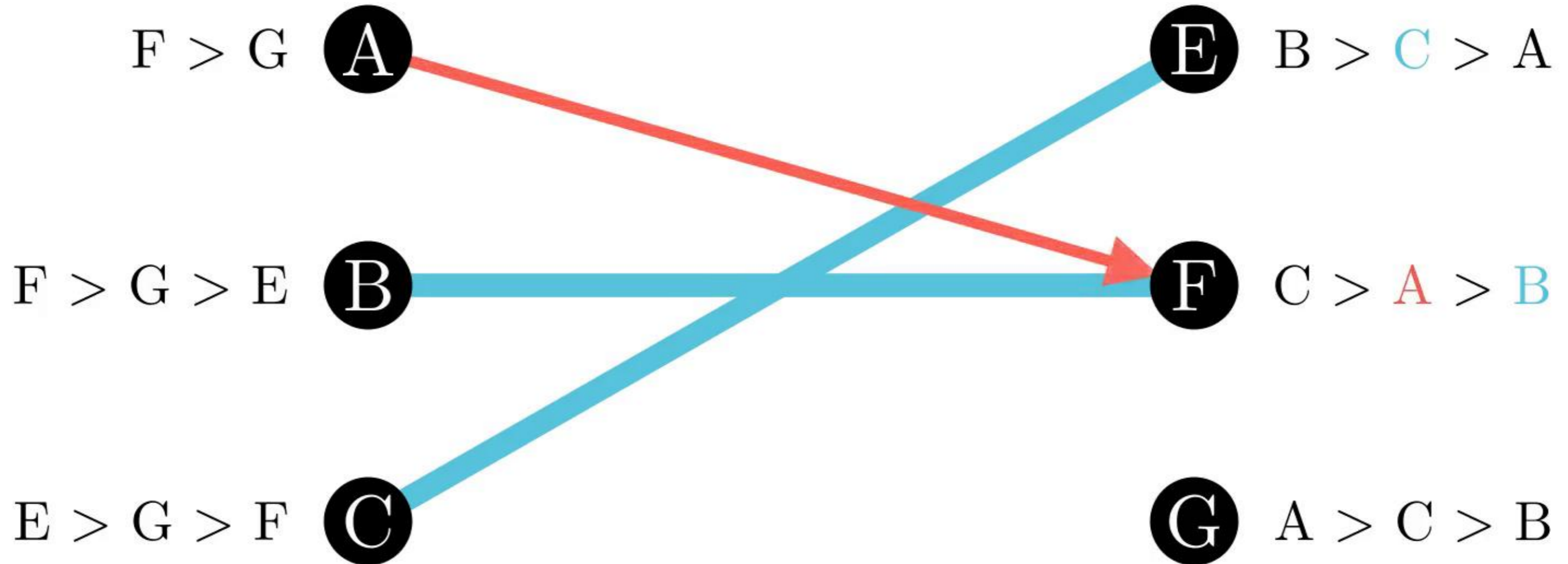
Comment trouver un couplage stable ?

Chaque femme se met en couple avec l'homme préféré parmi ceux qui ont proposé.



Comment trouver un couplage stable ?

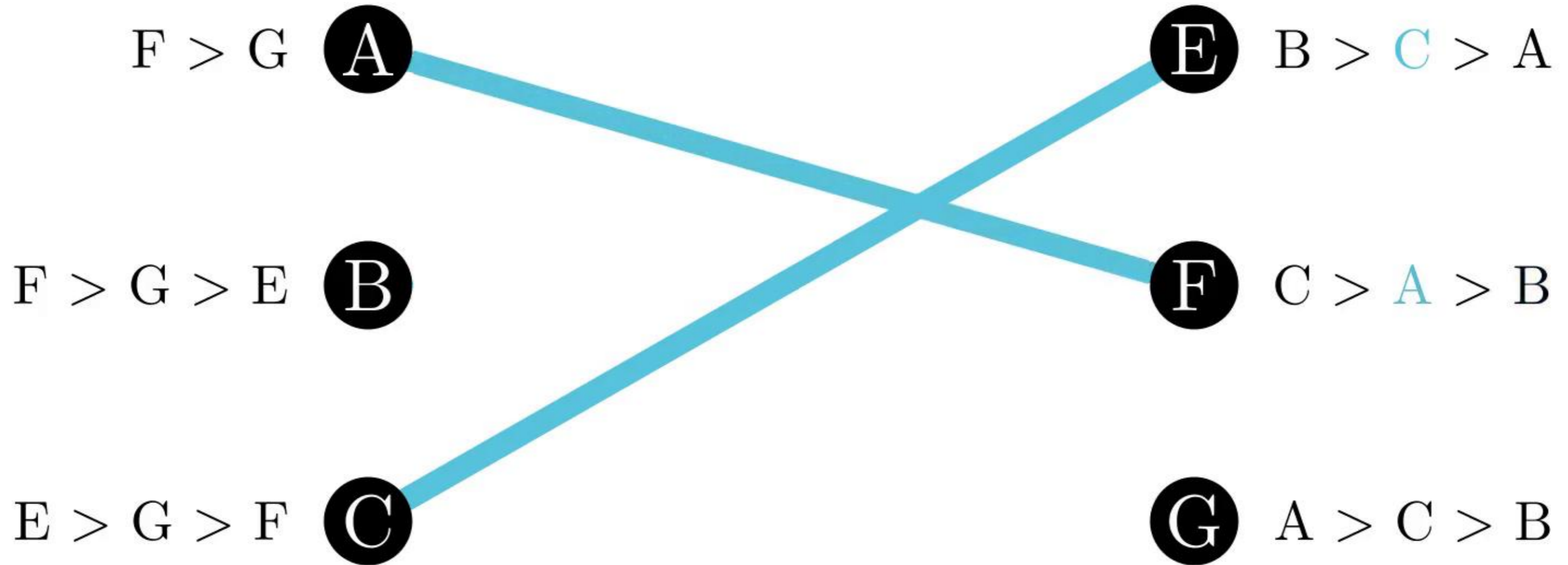
On répète tant qu'il reste au moins un homme célibataire.



(Merci à Nadia Brauner pour l'inspiration pour ces slides)

Comment trouver un couplage stable ?

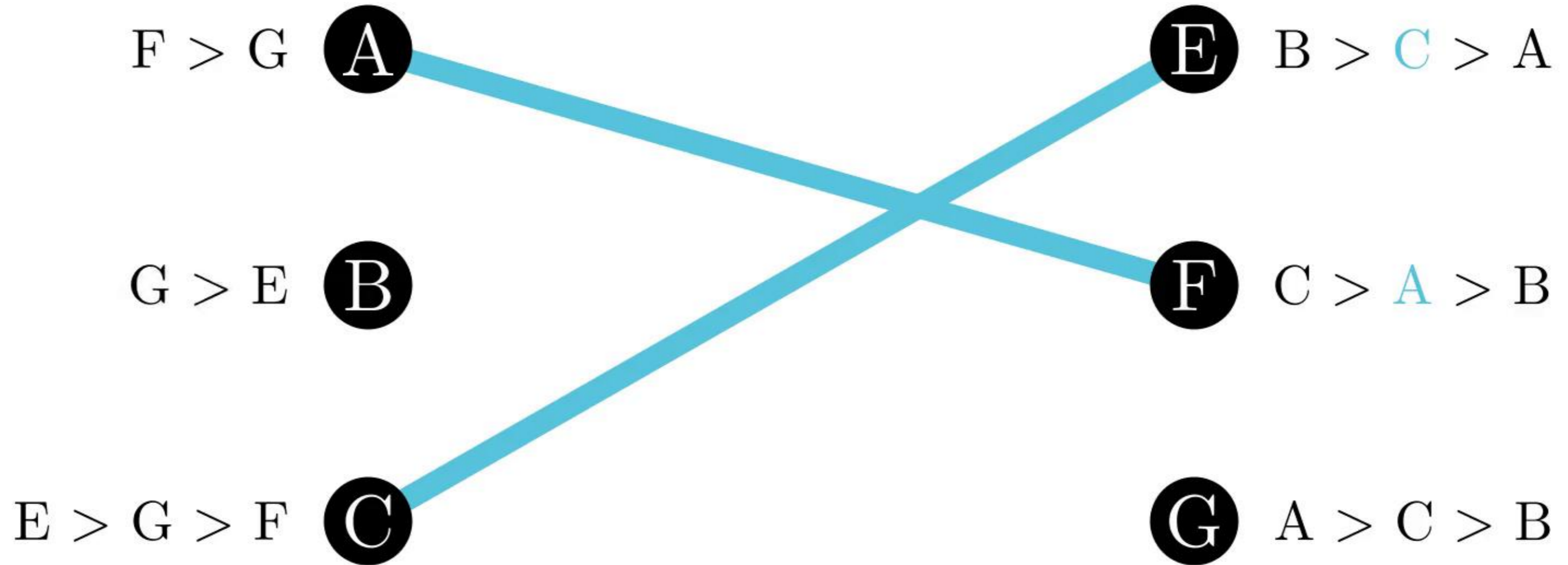
On répète tant qu'il reste au moins un homme célibataire.



(Merci à Nadia Brauner pour l'inspiration pour ces slides)

Comment trouver un couplage stable ?

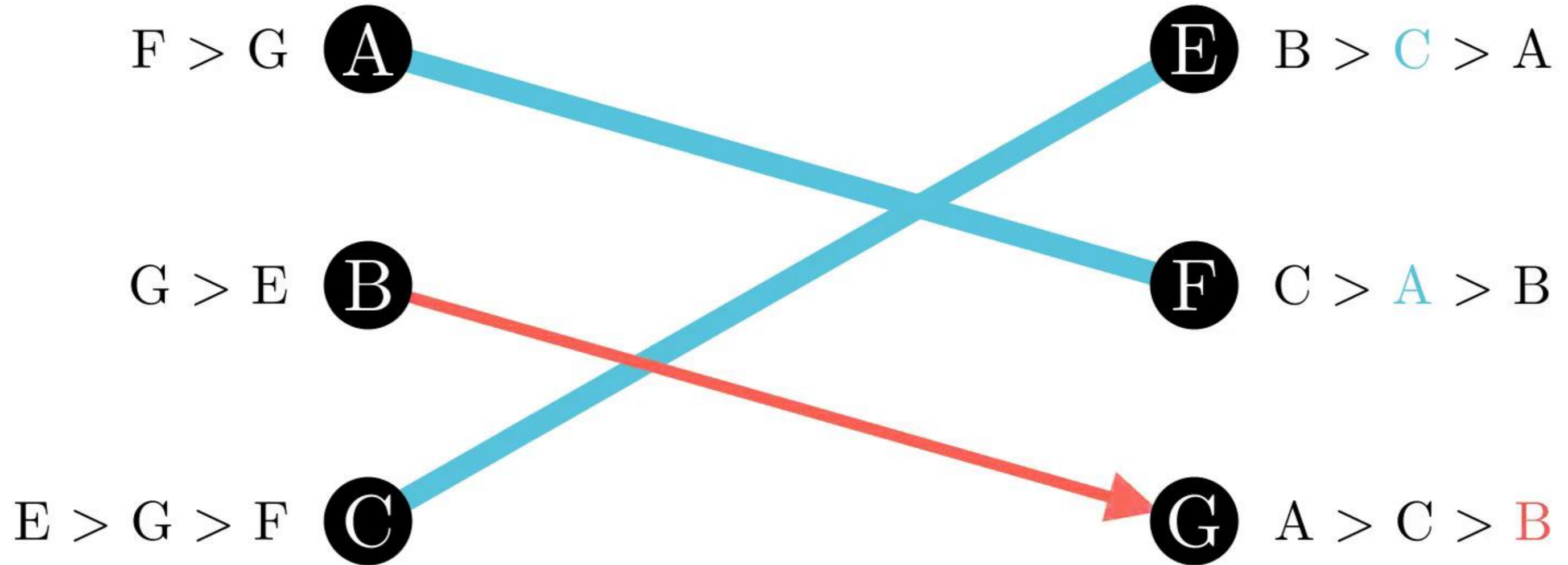
On répète tant qu'il reste au moins un homme célibataire.



(Merci à Nadia Brauner pour l'inspiration pour ces slides)

Comment trouver un couplage stable ?

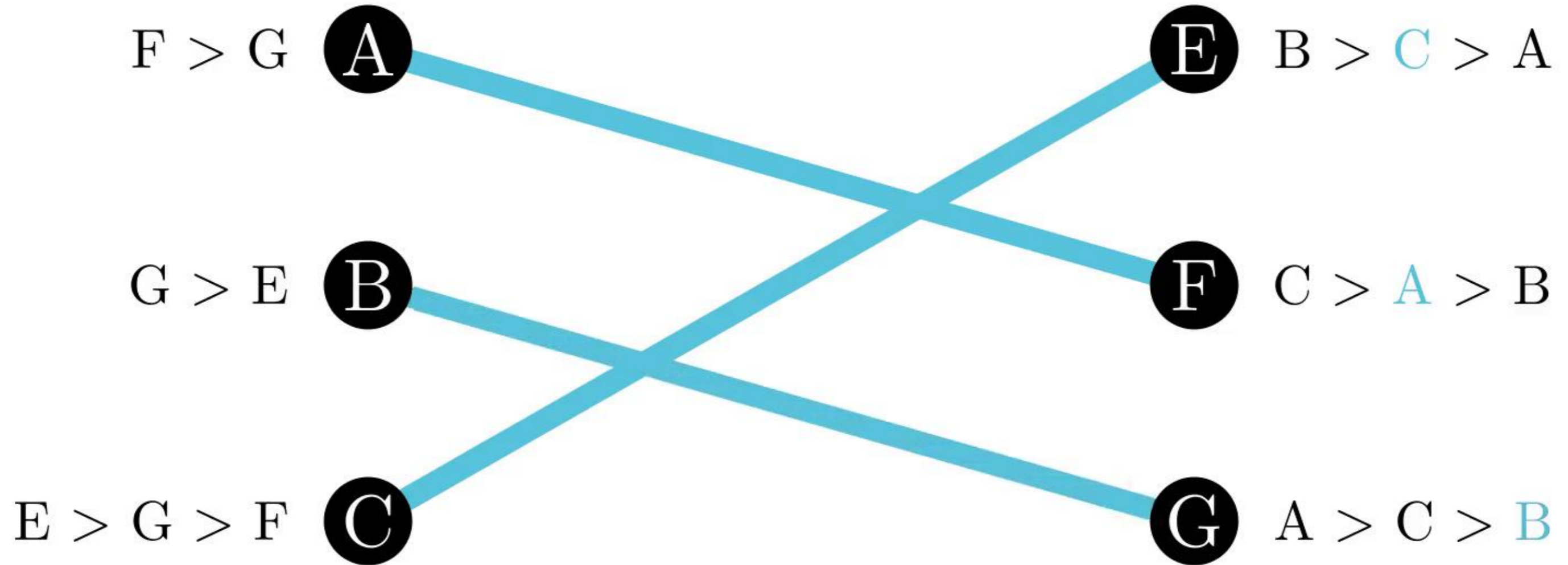
On répète tant qu'il reste au moins un homme célibataire.



(Merci à Nadia Brauner pour l'inspiration pour ces slides)

Comment trouver un couplage stable ?

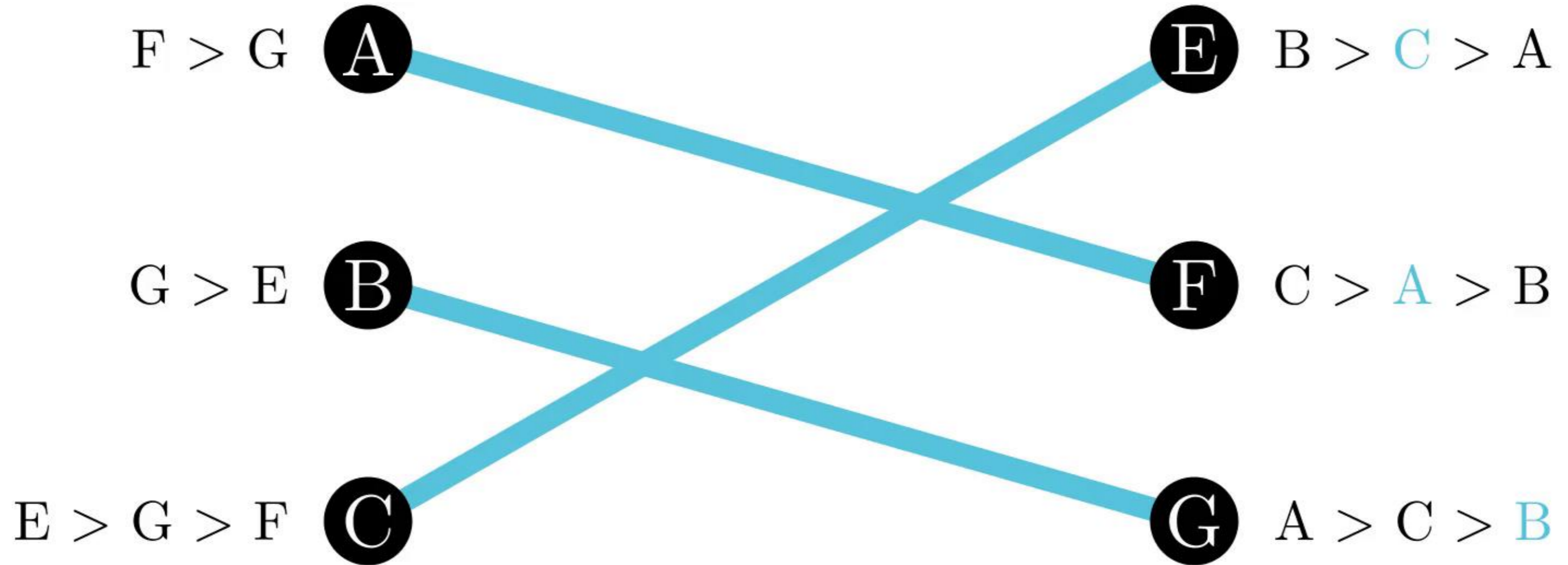
On répète tant qu'il reste au moins un homme célibataire.



(Merci à Nadia Brauner pour l'inspiration pour ces slides)

Comment trouver un couplage stable ?

Cet algorithme donne un couplage **homme-optimal**, **femme-minimal**.



Nous avons vu :

Quelques problèmes modélisés par des **graphes**

Nous avons vu :

Quelques problèmes modélisés par des **graphes**

Incompatibilité (Coloration)

- Achat des fréquences radio
- Salles dans un emploi du temps

Nous avons vu :

Quelques problèmes modélisés par des **graphes**

Incompatibilité (Coloration)

- Achat des fréquences radio
- Salles dans un emploi du temps

Compatibilité (Couplages)

- Trains vers voies de gare
- Couplages stables (Parcoursup)

Nous avons vu :

Quelques problèmes modélisés par des **graphes**

Incompatibilité (Coloration)

- Achat des fréquences radio
- Salles dans un emploi du temps

Compatibilité (Couplages)

- Trains vers voies de gare
- Couplages stables (Parcoursup)

Merci !